

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**Noções de Grafos Dirigidos, Cadeias de Markov e as
Buscas do Google.**

José Carlos Francisco de Oliveira

Agosto de 2014
São Cristóvão-SE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

José Carlos Francisco de Oliveira

Noções de Grafos Dirigidos, Cadeias de Markov e as Buscas do Google.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jose Anderson Valença Cardoso

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno **José Carlos Francisco de Oliveira** e orientada pelo Prof. Dr. Jose Anderson Valença Cardoso.

Agosto de 2014
São Cristóvão-SE

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

O48n Oliveira, José Carlos Francisco de
Noções de grafos dirigidos, cadeias de Markov e as buscas do
Google / José Carlos Francisco de Oliveira ; orientador J. Anderson
Valença Cardoso. - São Cristóvão, 2014.
89 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de
Sergipe, 2014.

1. Markov, Processos de. 2. Matrizes (Matemática). 3. Sistemas
lineares. 4. Probabilidades. 5. Google. 6. Sites da Web - Avaliação e
classificação I. Cardoso, J. Anderson Valença, orient. II. Título.

CDU 519.217.2:007

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Noções de Grafos Dirigidos, Cadeias de Markov e as Buscas do Google

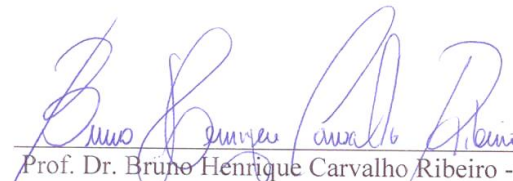
por

José Carlos Francisco de Oliveira

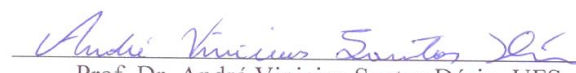
Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Orientador



Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB
Primeiro Examinador



Prof. Dr. André Vinicius Santos Dória- UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de agosto de 2014

Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos” – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedico à minha excepcional esposa, Maria Tânia, pelo grande apoio, carinho, amor e paciência comigo nos momentos mais difíceis. Ao meu querido filho, Carlos Nicolas, e peço desculpas pela ausência nos momentos em que mais precisou de minha presença; aos meus amigos e familiares que acreditaram na minha capacidade, em particular minha mãe e minha sogra pela força que me deram durante esses anos.

Agradecimentos

Finalmente chego ao final de mais uma etapa e é impossível seguir adiante sem agradecer ao grande responsável por todos os sucessos obtidos em minha vida, por isso, agradeço primeiramente a Deus por ter me dado muita força e coragem para persistir nessa caminhada.

Um agradecimento especial deve ser feito a minha querida esposa, Tânia, por sua extrema paciência, pelo seu amor, por sempre estar disposta a me ajudar em qualquer situação, inclusive neste trabalho e, principalmente, pelo seu apoio que me conforta e me deixa mais forte para superar meus desafios. E ao meu filho, Nicolas, maior presente que Deus me deu.

Agradeço aos meus familiares que sempre acreditaram e torceram por mim. Em especial, aos meus pais, Salete e Gersio, que me deram não somente a vida, mas principalmente educação e condições de estudo e que, junto com meus outros irmãos de diferentes maneiras me ajudaram muito a concluir mais esta etapa da minha vida. Obrigada por compreenderem todos os momentos de ausência e por todo o apoio que me deram, sempre acreditando e me fazendo acreditar que sou capaz. E a minha sogra, Terezinha, que sempre estava de prontidão para ajudar no que fosse preciso.

Aos colegas mestrandos, que lutaram junto comigo durante esses dois anos de estudo, que oscilava entre momentos de preocupação e de descontração. E muitas das vezes me davam força para continuar juntos até o fim.

Aos amigos Josivan, Eduardo, Valéra, Gilvaneide e Carlos não só por terem me acolhido junto com minha família em suas casas quando mais precisei, mas também pelo grande apoio que me deram durante todo o curso.

Ao meu orientador e professor Anderson Valença, que cooperou para esse momento ímpar da minha carreira. Obrigado pelas sugestões e pela paciência.

Agradeço também a SBM pela grande iniciativa em implementar um programa tão audacioso objetivando a formação continuada de professores e, consequentemente, aumentando o nível da educação básica. Também a CAPES pela concessão da bolsa que foi de fundamental importância para o desenvolvimento acadêmico.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram na concretização deste sonho, dedico meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo destacar alguns conceitos matemáticos que estão por trás do ranqueamento dado por uma pesquisa feita no site de busca mais usados do mundo, o “Google”. Inicialmente abordamos de forma breve alguns conteúdos da matemática do ensino médio, a exemplo de: matrizes, sistemas lineares, probabilidades. Em seguida são introduzidas noções básicas de grafos dirigidos e cadeias de Markov de tempo discreto; essa última, é dada uma ênfase ao vetor estado estacionário, por ele garantir resultados de previsão de longo prazo. Esses conceitos são de grande importância em nosso trabalho, pois serão usados para explicar o envolvimento da matemática por trás do site de buscas “Google”. Na sequência, buscamos detalhar o funcionamento do ranqueamento das páginas de uma busca no “Google”, isto é, como são classificados os resultados de uma pesquisa, determinando quais resultados serão apresentados de modo sequencial em ordem de relevância. Finalmente, chegamos na obtenção do “PageRank”, algoritmo que gera a chamada Matriz do Google e ranqueia as páginas de uma busca. Encerramos com um breve histórico do surgimento dos sites de buscas, desde os seus fundadores até a ascensão e hegemonia do Google.

Palavras Chaves: Matrizes, Sistema Lineares, Probabilidades, Grafos Dirigidos, Passeios Aleatórios, Cadeias de Markov, PageRank, Vetor Estado Estacionário, Buscador Google.

Abstract

This paper has as its main purpose to highlight some mathematical concepts, which are behind the ranking given by a research made on the website mostly used in the world: Google. At the beginning, we briefly approached some High School's concepts, such as: Matrices, Linear Systems and Probability. After that, we presented some basic notions related to Directed Graphs and Markov Chains of Discrete Time. From this last one, we gave more emphasis to the Steady State Vector because it ensures foreknowledge results from long-term. These concepts are extremely important to our paper, because they will be used to explain the involvement of Mathematic behind the web search "Google". Then, we tried to detail the ranking operation of the search pages on Google, i.e., how the results of a research are classified, determining which results are presented in a sequential way in order of relevance. Finally we obtained "PageRank", an algorithm which creates what we call Google's Matrices and ranks the pages of a search. We finished making a brief comment about the historical arising of the web searches, from their founders to the rise and hegemony of Google.

Key words: Matrices, Linear Systems, Probability, Directed Graphs, Random Walks, Markov Chains, PageRank, Steady State Vector, Google Search Engine.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Matrizes e Sistemas Lineares	4
1.1 Matrizes	4
1.1.1 Definição de Matrizes	4
1.1.2 Matriz Transposta	9
1.1.3 Matriz Inversa	10
1.1.4 Potências de uma Matriz	12
1.2 Sistemas Lineares	12
1.2.1 Equação Linear	12
1.2.2 Sistema de Equações Lineares	13
1.2.3 Método de Resolução de um Sistema Linear	16
2 Noções de Probabilidades	22
2.1 Combinação de Eventos	23
2.2 Frequência Relativa	24
2.3 Definição de Probabilidade	25
2.4 Propriedades de Probabilidades em Espaço Amostral Finito.	26
2.5 Espaços Amostrais Equiprováveis	26
2.6 Probabilidade de um Evento num Espaço Equiprovável	27
2.7 Probabilidade Condicional	28
2.8 Independência de Dois Eventos	29
3 Cadeias de Markov, Grafos e Grafos Dirigidos	32
3.1 Cadeias de Markov	32
3.1.1 Processo Aleatório de Markov	35
3.1.2 Vetor e Matriz de Probabilidade	36
3.1.3 O Vetor-estado	37
3.1.4 Matriz Regular	39
3.1.5 O Vetor Estado Estacionário	40
3.2 Grafos	42
3.2.1 Grafos Dirigidos	46
3.2.2 Matriz de um Grafo Dirigido	48

3.2.3	Passeio Aleatório Simples num Grafo Dirigido	49
3.2.4	Matriz de Probabilidade de um Passeio Aleatório Simples num Grafo Dirigido	50
4	O Buscador Google	52
4.1	Funcionamento do buscador Google	52
4.1.1	Conceitos Preliminares	52
4.1.2	Interpretação do Vetor Estado Estacionário	56
4.1.3	PageRank e a Matriz do Google	64
A	Histórico	71
	Referências Bibliográficas	79

Introdução

Nos dias atuais, é impossível pensar o mundo sem a Internet. Ela se tornou parte dos lares de pessoas do mundo inteiro. Está conectado à rede mundial de computadores passou a ser uma necessidade básica. Desde a sua criação, a rede mundial de computadores passou a ser uma fonte importante de consulta, pois dia após dia são disponibilizadas mais e mais informações. Com tantas informações disponíveis em apenas um lugar, surge a necessidade de organizá-las. O problema é que, mesmo organizadas, se o número de informações é muito grande, torna-se impraticável uma pessoa verificar uma por uma até encontrar a desejada. Foi possivelmente da necessidade de encontrar informações em um conjunto muito grande delas que surgiram os buscadores. Os primeiros sites que apareceram como ferramentas de buscas de informações na Internet foram “Yahoo” e o “Excite” nos anos de 1995 e 1996, respectivamente (veja [7]). Esses mecanismos de buscas, embora selecionassem informações de interesse de quem fazia a pesquisa, não possuíam um modo de determinar quais páginas seriam, provavelmente, mais relevantes para a pesquisa; exigindo ao pesquisador verificar as páginas indicadas uma por uma, num processo enfadonho. Essa situação melhorou muito em 1998, quando os mecanismos de busca começaram a usar a informação contida na estrutura de hiperlink da rede para ajudar a ordenar as páginas. O primeiro dessa nova geração de mecanismos de busca foi o Google, um projeto de dois alunos de pós-graduação em ciência da computação na Universidade de Stanford: Sergey Brin e Lawrence Page. Brin e Page consideraram que uma página na rede era importante se tivesse hiperlinks a partir dela, para outras páginas importantes. Eles usaram a ideia de um “surfista aleatório”: um surfista na rede movendo-se de página para página, escolhendo aleatoriamente o link que deseja seguir. O movimento do surfista entre as páginas pode ser modelado usando-se Cadeias de Markov, tema que será abordado no Capítulo 3. As páginas visitadas com mais frequência por esse surfista aleatório devem ser mais importantes e, portanto, mais relevantes, se seu conteúdo contiver as palavras da pesquisa. Embora Brin e Page não soubessem disso na época, eles estavam tentando encontrar o Vetor Estado Estacionário para uma Cadeia de Markov particular, cuja matriz de transição modelava a estrutura de hiperlinks da rede. Depois de algumas modificações importantes dessa matriz (que passou a ser chamada de “Matriz do Google” (veja [9]), pode-se encontrar um Vetor Estado Estacionário e suas componentes podem ser interpretadas como a quantidade de tempo que um surfista aleatório vai gastar em cada página da Web. O cálculo desse Vetor Estado Estacionário é a base para o algoritmo PageRank do Google. Sendo assim, da próxima vez que você usar o Google para fazer pesquisas, saiba que está usando os resultados aqui destacados neste trabalho para encontrar uma página que

provavelmente contenha as informações desejadas.

Como possivelmente já percebido, o buscador Google é repleto de ferramentas matemáticas aplicadas para garantir o seu funcionamento. Nele usa-se diversos conceitos matemáticos a exemplo de Matrizes, Sistema Lineares, Probabilidades, Grafos Dirigidos, Passeios Aleatórios, Cadeias de Markov de Tempo Discreto, etc. Geralmente, muitos se perguntam, especialmente os alunos, sobre a aplicabilidade de vários assuntos da matemática estudados nos ensinos básico, médio e universitário. Com o intuito de responder a algumas dessas perguntas, estudamos neste trabalho alguns dos assuntos que possuem aplicações diretas ao funcionamento das buscas realizadas no site do Google. O presente trabalho está dividido em quatro capítulos que tratam de parte dos assuntos que garantem ao site Google o sucesso de buscas realizadas na internet.

No Capítulo 1, estudamos Matrizes e Sistemas Lineares. Nele apresentamos os principais tipos de Matrizes e suas propriedades, com destaque nas operações elementares que aplicamos nas transições das Cadeias de Markov e na representação de Passeios Aleatórios, na obtenção da Matriz do Google e no Vetor Estado Estacionário. Nos Sistemas Lineares focamos na classificação e na resolução de sistemas pois são usados também para a obtenção das coordenadas do Vetor Estado Estacionário de uma Cadeia de Markov Regular.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de Probabilidade. Apresentamos os principais conceitos e propriedades necessários ao estudo de passeios aleatórios, com aplicação na construção das matrizes estocásticas e que têm aplicações diretas em passeios aleatórios nas Cadeias de Markov; ferramentas básicas no algoritmo de busca do Google.

Apresentamos no Capítulo 3 os conceitos de Cadeias de Markov e Grafos Dirigidos. No primeiro estudamos processos que ocorrem a partir de um estado inicial e que passa por uma sequência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorre segundo uma certa probabilidade que depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do próximo. Nele enfatizamos os Processos Aleatórios, a Matriz de Transição, o Vetor-Estado, a Matriz Regular e o Vetor Estado Estacionário, onde o principal objetivo é uma previsão do comportamento de certos fenômenos que é usada no ranqueamento dos resultados das buscas. No segundo é mostrado um estudo e a montagem de uma matriz de um grafo dirigido e principalmente a matriz de probabilidades de um passeio aleatório.

O Capítulo 4 é destinado a uma apresentação de como é feita a busca na ferramenta Google e o que está por trás do seu ranqueamento, de forma que observamos os principais elementos que definem uma página importante na rede. Depois usamos elementos matemáticos para ranquear páginas nos exemplos dados neste capítulo. No final, apresentamos as principais modificações para se chegar na chamada Matriz do Google que é usada pelo algoritmo “PageRank” para classificar a ordem dos resultados e finalizamos dando um exemplo de uma pesquisa feita em sala de aula usando o algoritmo para classificar o resultado.

Finalmente, concluímos o presente trabalho com um breve histórico sobre o início dos sites de buscas, seus desafios de sobrevivência e como se tornaram hoje essenciais aos internautas. Falamos brevemente da origem do “Yahoo” e principalmente do “Google”.

Imaginamos que saber como é o funcionamento desta poderosa ferramenta chamada Google, que revolucionou a era da internet e ajuda a maioria dos internautas a encontrar o que lhes interessa, geralmente nas primeiras páginas do resultado da busca, pode ser bastante motivador, visto que existe uma imensidade de sites contidos na rede mundial de computadores.

Capítulo 1

Matrizes e Sistemas Lineares

Este capítulo foi baseado nas referências [2, 3, 9, 10, 13]. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar qualquer das citadas referências.

1.1 Matrizes

1.1.1 Definição de Matrizes

Definição 1.1. *Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se ordem $m \times n$) toda tabela A formada por números reais a_{ij} distribuídos em m linhas e n colunas. Os números reais distribuídos são chamados entradas ou elementos da matriz.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Quando $n = m$ a matriz A é dita quadrada de ordem n . Os elementos a_{ij} , onde $i = j$ formam a chamada **Diagonal Principal** e os elementos onde $i + j = n + 1$ formam a chamada **Diagonal Secundária**.

Numa forma compacta, uma matriz A pode ser representada por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ou ainda, se a ordem estiver subentendida $A = [a_{ij}]$ ou $A = (a_{ij})$.

Tipos Especiais de Matrizes

Existem matrizes que, por apresentarem uma maior utilidade, recebe nomes especiais, seja pelo número de linhas ou colunas, ou ainda pela natureza de suas entradas.

Matriz Linha: é uma matriz com apenas uma linha.

$$L = (l_{11} \quad l_{12} \quad \dots \quad l_{1n}).$$

Matriz Coluna: é uma matriz com apenas uma coluna

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}.$$

Matriz Nula: é uma matriz que possui as entradas todas nulas

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz Diagonal: é uma Matriz Quadrada onde os únicos elementos possivelmente não nulos pertencem a Diagonal Principal

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matriz Identidade de ordem n (I_n): é uma Matriz Diagonal cujos elementos da Diagonal Principal são todos iguais a 1

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz Triangular: é uma Matriz Quadrada onde todas as entradas abaixo ou acima da diagonal principal são nulas,

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

A matriz A anterior é dita Triangular Superior e a matriz B é chamada de Triangular Inferior.

Igualdade de Matrizes

Definição 1.2. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, dizemos que elas são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Note que, para serem iguais, duas matrizes devem ter mesma ordem e apresentarem os elementos das mesmas entradas iguais.

Exemplo 1.3. Determine os valores de x , y e z que tornam as matrizes A e B iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x+1 & 1 \\ 3 & 5 & y-2 \\ |z| & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observe que as matrizes possuem a mesma ordem. Então, para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que os elementos das mesmas entradas sejam iguais. Assim, devemos ter:

- $x + 1 = 7 \Rightarrow x = 6$
- $y - 2 = 9 \Rightarrow y = 11$
- $|z| = 4 \Rightarrow z = \pm 4$

Operações com Matrizes

Soma

Definição 1.4. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma de A e B , que denotamos por $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para cada i e j .

Observação 1.5. A soma de duas ou mais matrizes só será possível se forem de mesma ordem, caso contrário não existirá a soma. Cada elemento da soma é a soma dos elementos das mesmas entradas de cada matriz.

Exemplo 1.6. Considere as matrizes A e B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para obter a matriz $C = A + B$, basta somar os elementos correspondentes de A e B :

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix}.$$

Portanto: $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$

Oposta

Definição 1.7. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se oposta de A , e denotada por $-A$, uma matriz tal que $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$.

Exemplo 1.8. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ então $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diferença

Definição 1.9. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença de A e B , que denotamos por $A - B$, a soma da matriz A com a oposta de B .

Exemplo 1.10. Temos a diferença das matrizes 2×3 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 11 & 8 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11 & 8 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Propriedades da Soma de Matrizes

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

- $A + B = B + A$ (comutativa);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa);
- $A + 0_{m \times n} = A$ ($0_{m \times n}$ é chamado de elemento neutro);
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$ (oposto);
- $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$ (cancelamento).

Produto de um Número Real por uma Matriz

Definição 1.11. Dados um número real a e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o produto aA é definido como a matriz $(aa_{ij})_{m \times n}$.

Exemplo 1.12. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Temos por exemplo:

- $3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{pmatrix};$
- $\frac{1}{2}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

Propriedades do Produto de um Número Real por uma Matriz

O produto de um número real por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

- $a(bA) = (ab)A$;
- $a(A + B) = aA + aB$;
- $(a + b)A = aA + bA$;
- $1A = A$.

onde A e B são matrizes quaisquer $m \times n$ e a e b são números reais quaisquer.

Produto de Matrizes

Definição 1.13. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, o produto AB é definido como a matriz $(c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk},$$

para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $k \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Observação 1.14. Note que a definição do produto de matrizes, AB só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B . Note que o produto AB tem ordem $m \times p$ e as entradas de $C = AB$ são da forma c_{ik} , que são obtidas através da soma das multiplicações de cada termo da i -ésima linha da matriz A com cada termo correspondente da k -ésima coluna da matriz B .

Exemplo 1.15. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos o produto AB como:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & + & 7 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 & + & (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+7 \\ 15-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Propriedades do produto de matrizes

O produto de matrizes, quando é possível multiplicar, apresenta as seguintes propriedades:

- Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $AI_n = A$ e $I_m A = A$ (I_n e I_m são ditas elementos neutros);
- $(AB)C = A(BC)$ (associatividade);
- $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita);
- $C(A + B) = CA + CB$ (distributividade à esquerda).

- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ (a multiplicação por escalar é associativa).

Observação 1.16. É importante notar que o produto de matrizes não é comutativo, isto é, para duas matrizes quaisquer A e B nem sempre tem-se $AB = BA$. Por exemplo, para as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos AB , mas sequer faz sentido BA . Quando $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Observe ainda que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas e de mesma ordem.

Exemplo 1.17. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

não comutam. De fato, veja que:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix}$$

enquanto

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $AB \neq BA$.

Por outro lado, as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

comutam. Com efeito, veja que:

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$DC = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $CD = DC$.

1.1.2 Matriz Transposta

Definição 1.18. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$.

Observe que as linhas (Colunas) de um matriz A são as colunas (linhas) de A^t .

Exemplo 1.19. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{1 \times 4}.$$

As transpostas de A e B são

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad e \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}_{4 \times 1}.$$

Propriedades sobre transposta de uma matriz

Dadas A e B matrizes quaisquer que façam sentido à soma e o produto delas e k é um número real qualquer, temos válidas as seguintes propriedades:

- $(A^t)^t = A$;
- $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- $(kA)^t = kA^t$;
- $(AB)^t = B^t A^t$.

1.1.3 Matriz Inversa

Definição 1.20. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é matriz invertível (ou inversível) se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é invertível, dizemos que A é uma matriz singular.

Teorema 1.21. Se A é invertível, então existe apenas uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Demonstração. Admitamos que exista uma outra matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Então,

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

□

Notação 1.22. Dada A uma matriz invertível A , denotamos por A^{-1} a matriz (que é única pelo teorema anterior) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Observação 1.23. Note que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n , pois A^{-1} comuta com A .

Exemplo 1.24. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ é invertível. De fato, se considerarmos a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

observamos que

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 7 + 7 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 - 6 & -3 + 3 \\ 14 - 14 & -6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 7 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 - 6 & 21 - 21 \\ -2 + 2 & -6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $AB = BA = I_n$ e que $B = A^{-1}$.

Exemplo 1.25. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Para a matriz A ser invertível, deve existir uma inversa A^{-1} , quadrada de ordem 2, tal que $AA^{-1} = I_n$. Então, vamos supor que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Assim, temos que

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, obtém-se

$$\begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = -2 \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b + 4d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -4 \text{ e } d = 3.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, pode-se verificar que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Propriedades da Matriz Inversa

Dadas A e B matrizes quaisquer que façam sentido o produto entre elas, temos válidas as seguintes propriedades:

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

1.1.4 Potências de uma Matriz

Definição 1.26. Se A for uma matriz $n \times n$ e k for um inteiro não-negativo, definimos as potências inteiras não-negativas de A por

$$A^0 = I_n \quad e \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ vezes}}, \text{ para } k > 0.$$

Exemplo 1.27. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Temos

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.28. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Temos

$$\begin{aligned} B^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 22 & 7 \\ -66 & -9 & -29 \\ 21 & 29 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.2 Sistemas Lineares

Os Sistemas de Equações Algébricas Lineares ou simplesmente Sistemas Lineares constituem um dos principais tópicos estudados no Ensino Médio e Superior, sendo no último caso, um tópico da “Álgebra Linear”. Aqui nos limitaremos aos conceitos mais básicos que ajudarão no bom entendimento do presente trabalho.

1.2.1 Equação Linear

Qualquer linha reta no plano xy pode ser representada por uma equação da forma

$$a_1x + a_2y = b,$$

onde a_1 , a_2 e b são números reais, sendo a_1 e a_2 não são ambas nulas. Toda equação nessa forma é chamada de **Equação Linear** nas variáveis x e y . Esse caso bem simples motiva o seguinte conceito:

Definição 1.29. Uma Equação Linear é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,^1$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são incógnitas e a_1, a_2, \dots, a_n e b são números dados. Os números reais a_1, a_2, \dots, a_n são chamados de coeficientes e b é chamado termo independente da equação.

¹Quando o termo independente é nulo, a equação linear é dita **Homogênea**.

Exemplo 1.30. *As seguintes equações são lineares:*

- $x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$;
- $x_1 - \frac{1}{2} = 3$;
- $2x + 3y - z = 0$.

Exemplo 1.31. *As seguintes equações NÃO são lineares:*

- $x_1^2 + 3\sqrt{x_2} - x_3 = 7$;
- $\cos(x_1) - \frac{1}{2} = 3$;
- $2x + 3y - z^3 = 0$.

Solução de uma Equação Linear

Definição 1.32. *Dizemos que a sequência ou enupla ordenada de números reais*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

é uma solução da Equação Linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

quando $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \dots + a_n\alpha_n = b$.

Exemplo 1.33. *O par ordenado $(3, 5)$ é solução da equação $-3x + 2y = 1$, pois substituindo x por 3 e y por 5, obtemos uma sentença verdadeira:*

$$-3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 1.$$

Exemplo 1.34. *A terna ordenada $(1, 3, 5)$ não é solução da equação*

$$3x - 2y - 3z = 14,$$

pois substituindo x por 1, y por 3 e z por 5, obtemos uma sentença falsa:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = 12 \neq 14.$$

1.2.2 Sistema de Equações Lineares

Frequentemente nos deparamos com situação-problema cuja solução pode ser obtida com uma formulação de um sistema linear.

Definição 1.35 (Sistema de Equações Lineares). *Um Sistema de Equações Lineares m por n é um conjunto de m equações lineares da forma:*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ os coeficientes e b_1, b_2, \dots, b_m os termos independentes.² Por simplicidade, quando não houver risco de confusão, dizemos apenas que **S** é um Sistema Linear.

Exemplo 1.36. O sistema linear

$$\mathbf{S} = \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$$

tem 2 equações e 2 incógnitas.

Exemplo 1.37. O sistema linear

$$\mathbf{S} = \begin{cases} -x - 3y + z = 0 \\ 5x - 2y - z = 8 \\ 6x + 5y + 2z = 9 \\ -x + 2y - 4z = -3 \end{cases}$$

tem 4 equações e 3 incógnitas.

Exemplo 1.38. O sistema

$$\mathbf{S} = \begin{cases} 2x - y - 6z = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

tem 2 equações e 3 incógnitas e é homogêneo.

Solução de um Sistema Linear

Definição 1.39. Uma Solução de um sistema linear de m equações com n incógnitas é uma enupla

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

que é solução de cada uma das m equações lineares do sistema.

Exemplo 1.40. O sistema

$$\mathbf{S} = \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

admite como solução a tripla ordenada $(1, 2, 3)$, pois

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4 \end{cases}.$$

A tripla ordenada $(-5, 11, 0)$ não é solução **S**, pois

$$\begin{cases} -5 + 11 + 0 = 6 \\ 2 \cdot (-5) + 11 - 0 = 1 \\ 3 \cdot (-5) - 11 + 0 \neq 4 \end{cases}.$$

Observação 1.41. Qualquer sistema homogêneo possui uma solução da forma $(0, 0, \dots, 0)$ chamada de solução **nula** ou **trivial**. As soluções de um sistema homogêneo que não são nulas, são chamadas de soluções **não nulas** ou **não triviais**.

²Quando todos os termos independentes de um sistema linear são nulos, o sistema é dito **Homogêneo**.

Classificação de um Sistema Linear

Os sistemas lineares são classificados de acordo com a existência e o número de soluções. Classificamos em:

- Sistema Possível e Determinado (SPD) - quando possui uma única solução;
- Sistema Possível e Indeterminado (SPI) - quando possui infinitas soluções;
- Sistema Impossível (SI) - quando não possui solução.

Exemplo 1.42. *O sistema*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

tem uma única solução; a saber, o par $(3, -1)$.

Exemplo 1.43. *O sistema*

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases},$$

tem infinitas soluções. Por exemplo, $(1, 1/2, 1)$ e $(2, 1, 2)$ são algumas das soluções desse sistema. Podemos representar todas as soluções (ou “solução geral”) por $(\alpha, \alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.44. *O sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

não possui solução, pois a primeira equação é incompatível com a terceira equação. De fato, imagine que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é uma solução do sistema. Então,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad e \quad 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

Assim,

$$3 = 3 \cdot 1 = 3(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0,$$

o que é impossível.

Sistemas Lineares e Matrizes

Com as operações e propriedades de matrizes podemos estudar sistemas lineares. Considere um sistema linear m por n

$$\mathbf{S} = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

A igualdade de matrizes nos permite escrever

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

E com a multiplicação de matrizes obtemos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

1.2.3 Método de Resolução de um Sistema Linear

Nosso objetivo nesta seção é estudar um método para a resolução de sistemas lineares em geral. A técnica que será utilizada pode não ser a melhor no caso de sistemas muito simples, mas tem a vantagem de poder ser aplicada sempre. É particularmente útil em sistemas com grande número de incógnitas onde o uso de calculadoras é às vezes inevitável. Em síntese, este método consiste em substituir o sistema inicial por sistemas cada vez mais simples, sempre “equivalentes” ao original.

Para ajudar no entendimento, começamos com um exemplo, enumeramos as equações de cada sistema e colocamos ao lado de cada sistema uma matriz que chamamos de Matriz Associada ao Sistema. Vamos resolver o seguinte sistema:

$$(I) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (I_1) \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4 & (I_2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (I_3) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

1º Passo : Eliminamos o termo de x_1 das equações (I_2) e (I_3) . Para tanto, multiplicamos a equação (I_1) por -2 e somamos a equação obtida com a equação (I_2) , obtendo uma nova equação (II_2) . Da mesma maneira produziremos a equação (II_3) , obtida ao multiplicarmos a equação (I_1) por -1 e somando esse resultado à equação (I_3) . Isto resulta no seguinte sistema:

$$(II) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (II_1) \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (II_2) \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (II_3) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

2º Passo : Tornamos o coeficiente de x_2 da equação (II_2) igual a 1. Para tanto, multiplicamos a equação (II_2) por $-1/3$. O sistema resultante é:

$$(III) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (III_1) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (III_2) \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (III_3) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

3º Passo : Eliminamos x_2 das equações (III_1) e (III_3) . Para isso, multiplicamos a equação (III_2) por -4 e somamos a esta a equação (III_1) , obtendo (IV_1) . De

maneira análoga obtemos (IV_3) , multiplicando a equação (III_2) por 7 e somando o resultado à equação (IV_3) .

$$(IV) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (IV_1) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (IV_2) \\ 0x_1 - 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (IV_3) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

4º *Passo* : Tornamos o coeficiente de x_3 na equação (IV_3) igual a 1. Para isso, multiplicamos a equação (IV_3) por -3 . Isto resulta no seguinte sistema:

$$(V) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (V_1) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (V_2) \\ 0x_1 - 0x_2 - x_3 = 2 & (V_3) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5º *Passo* Eliminamos x_3 das duas primeiras equações do sistema (V) . Multiplicamos a equação (V_3) por $-1/3$ e somamos ao resultado à equação (V_1) . De modo análogo, multiplicamos a equação (V_3) por $-2/3$ e a esta nova equação somamos a equação (V_2) . o sistema resultante é:

$$(VI) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 \\ 0x_1 - 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Observe que cada sistema foi obtido a partir do sistema anterior, por operações que preservaram as igualdades. Assim, cada terna (x_1, x_2, x_3) que é solução do sistema (I) , também será solução dos sistemas seguintes $(II), (III), \dots, (VI)$. Deste modo, uma vez encontradas as soluções do sistema VI , as mesmas serão soluções do sistema I .

O ponto fundamental desse procedimento é que os passos são todos reversíveis. Por exemplo, a partir do sistema (II) podemos obter o sistema (I) , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (I_1) &= (II_1) \\ (I_2) &= 2 \cdot (II_1) + (II_2) \\ (I_3) &= (II_1) + (II_3), \end{aligned}$$

onde a notação, por exemplo, $(I_2) = 2 \cdot (II_1) + (II_2)$ indicar que a linha (I_2) do sistema (I) é obtida multiplicando-se por 2 a linha (II_1) do sistema (II) e somando-se a linha (II_2) do sistema (II) . De modo análogo, podemos obter o sistema (V) a partir de (VI) , (IV) a partir de (V) , (III) a partir de (IV) e (II) a partir de (III) . Usando o argumento anterior, podemos dizer que toda solução de (VI) também é solução de (I) . Mais ainda, os sistemas $(I), (II), (III), (IV), (V)$ e (VI) têm as mesmas soluções e, portanto, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$, que é a solução de (VI) , é a única solução do sistema inicial (I) . Podemos verificar por substituição direta que $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$ é uma solução, mas apenas como garantia de que não erramos nos cálculos.

Definição 1.45. Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se possuem as mesmas soluções.

No exemplo anterior os sistemas (I), (II), (III), (IV), (V) e (VI) são equivalentes. É importante observar que, no exemplo resolvido, as únicas operações que efetuamos são dos seguintes tipos:

1. Multiplicar uma equação por um número diferente de zero;
2. Somar uma equação a outra;
3. Permutar duas equações.

Exemplo 1.46. No sistema:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 5 & (1) \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

nosso primeiro passo seria permutar as equações (1) e (2), de modo a obter o coeficiente de x_1 diferente de zero na primeira equação.

Estas operações num sistema produzem sempre sistemas com mesmo conjunto-solução, como visto no exemplo inicial. Usaremos matrizes para apresentar uma maneira organizada de resolver sistemas de equações, seguindo a ideia do exemplo inicial.

Observação 1.47. Como já comentado, existem alguns métodos para encontrar solução de sistemas lineares. Dentre eles, podemos citar o método do isolamento, a regra de Cramer e o escalonamento ou eliminação gaussiana. No presente texto, nos limitaremos a resolução de sistemas lineares pelo método de escalonamento, o qual apresentaremos na sequência.

Redução por linhas e forma escalonada

O método (ou procedimento) sistemático para resolver sistemas lineares apresentado aqui é conhecido Método de Escalonamento. A estratégia básica é substituir um sistema por um sistema equivalente (isto é, um com o mesmo conjunto solução) que seja mais fácil de obter a solução. Seguindo o que já foi apresentado, basicamente usamos o termo x_1 da primeira equação do sistema para eliminar os termos em x_1 das outras equações. Depois, usamos o termo em x_2 da segunda equação para eliminar os termos em x_2 das outras equações, e assim por diante, até por fim obtermos um sistema equivalente bem simples (mais detalhes básicos podem ser obtidos, por exemplo, em [5]). Como já destacado, três operações básicas são usadas para simplificar um sistema linear.

Operações elementares nas linhas

De modo geral, as seguintes operações elementares podem ser aplicadas a qualquer sistema:

1. Multiplicar todos os elementos de uma linha por uma constante não nula.
2. Substituir uma linha pela soma dela mesma com um múltiplo de outra.
3. Troca de duas linhas entre si.

Dizemos que dois sistemas são equivalentes por linhas se existir uma sequência de operações elementares de linhas que transforme um sistema em outro. É importante observar que as operações elementares são reversíveis. Se dois sistemas lineares são equivalentes por linha, então os dois sistemas terão o mesmo conjunto solução.

Notação matricial

A informação essencial de um sistema linear pode ser representada de forma compacta por meio do uso de matrizes. Por exemplo, dado o sistema

$$(\mathbf{S}) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

podemos formar uma matriz com os coeficientes de cada variável alinhados em coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é chamada *matriz dos coeficientes* do sistema e a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

é conhecida como *matriz aumentada* do sistema. Observemos que a segunda linha contém um zero porque a segunda equação poderia ter sido escrita como $0 \cdot x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8$. Uma matriz aumentada de um sistema consiste na matriz dos coeficientes, com uma coluna adicional que contém as constantes à direita do sinal de igualdade nas equações.

Exemplo 1.48. Resolva o sistema (\mathbf{S}) anterior.

Solução: Vamos realizar o procedimento de eliminação com e sem a notação matricial e colocar o resultados lado a lado para compararmos:

$$(\mathbf{S}) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \text{eq.(1)} \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 & \text{eq.(2)} \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 & \text{eq.(3)} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}.$$

Queremos manter x_1 na primeira equação e eliminá-lo das outras. Para isso, adicionamos 4 vezes a primeira equação à terceira. Depois de alguma prática, o cálculo seguinte costuma ser feito rapidamente.

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot [eq.(1)] : & 4x_1 & - \quad 8x_2 \quad + \quad 4x_3 \quad = \quad 0 \\ +[eq.(3)] : & -4x_1 & + \quad 5x_2 \quad + \quad 9x_3 \quad = \quad -9 \\ \hline [nova eq.(3)] : & & - \quad 3x_2 \quad + \quad 13x_3 \quad = \quad -9 \end{array}$$

O resultado desse cálculo é colocado no lugar da terceira equação original:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 \quad + \quad x_3 \quad = \quad 0 \\ & & 2x_2 \quad - \quad 8x_3 \quad = \quad 8 \\ & & - \quad 3x_2 \quad + \quad 13x_3 \quad = \quad -9 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right].$$

A seguir, multiplicando a segunda equação por 1/2 para obter o coeficiente de x_2 igual a 1. (Esse cálculo irá simplificar a aritmética do próximo passo).

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 \quad + \quad x_3 \quad = \quad 0 \\ & & x_2 \quad - \quad 4x_3 \quad = \quad 4 \\ & & - \quad 3x_2 \quad + \quad 13x_3 \quad = \quad -9 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right].$$

Usando o x_2 na segunda equação para eliminar $-3x_2$ na terceira equação. O cálculo é

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot [eq.(2)] : & 3x_2 & - \quad 12x_3 \quad = \quad 12 \\ +[eq.(3)] : & - \quad 3x_2 & + \quad 13x_3 \quad = \quad -9 \\ \hline [nova eq.(3)] : & & x_3 \quad = \quad 3 \end{array}$$

O novo sistema tem a forma triangular:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 \quad + \quad x_3 \quad = \quad 0 \\ & & x_2 \quad - \quad 4x_3 \quad = \quad 4 \\ & & x_3 \quad = \quad 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Agora vamos usar x_3 da terceira equação para eliminar os termos x_3 e $-4x_3$ na primeira e segunda equações. Os cálculos são

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot [eq.(3)] : & & 4x_3 \quad = \quad 12 \\ +[eq.(2)] : & x_2 & - \quad 4x_3 \quad = \quad 4 \\ \hline [nova eq.(2)] : & x_2 & \quad \quad \quad = \quad 16 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} -1 \cdot [eq.(3)] : & & - \quad x_3 \quad = \quad -3 \\ +[eq.(1)] : & x_1 & - \quad 2x_2 \quad + \quad x_3 \quad = \quad 0 \\ \hline [nova eq.(1)] : & x_1 & - \quad 2x_2 \quad \quad \quad = \quad -3. \end{array}$$

Combinando os resultados dessas duas operações, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 \quad \quad \quad = \quad -3 \\ & & x_2 \quad \quad \quad = \quad 16 \\ & & x_3 \quad \quad \quad = \quad 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Assim, tendo eliminado a coluna acima de x_3 na terceira equação, retornamos a x_2 na segunda equação para eliminar o $-2x_2$ acima de x_2 . Por causa da conta anterior

com x_3 , agora não temos nenhuma conta com ele. Somando 2 vezes a segunda equação à primeira, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & & = 29 \\ & x_2 & = 16 \\ & & x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o trabalho está concluído. Ele indica que a única solução do sistema original é $(29, 16, 3)$. No entanto, como fizemos tantos cálculos, seria uma boa idéia verificar nosso resultado. Para verificar que $(29, 16, 3)$ é, de fato, uma solução, substituímos esses valores nas expressões à esquerda dos sinais de igualdade no sistema original e calculamos:

$$\begin{cases} (29) - 2(16) + (3) = 0 \\ & 2(16) - 8(3) = 8 \\ -4(29) + 5(16) + 9(3) = -9 \end{cases}.$$

Os resultados conferem com os números à direita dos sinais de igualdade no sistema original, de modo que $(29, 16, 3)$ é uma solução do sistema.

Exemplo 1.49. Resolva o sistema linear homogêneo

$$(\mathbf{S}_h) \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Solução: Refazendo os procedimentos do exemplo anterior. Primeiro montamos a matriz aumentada ao associada sistema.

$$(\mathbf{S}_h) \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo essa matriz a forma escalonada reduzida por linhas obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{13} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como não se pode reduzir mais, obtemos $x = \frac{2}{5}z$ e $y = \frac{13}{5}z$. Logo a solução geral é $(\frac{2}{5}z, \frac{13}{5}z, z)$. Note que a solução trivial é obtida quando $z = 0$.

Observação 1.50. Um sistema de equações lineares homogêneas tem uma única solução (a trivial) ou possui infinitas soluções.

Capítulo 2

Noções de Probabilidades

Com o objetivo de tornar o presente trabalho o mais auto contido possível, neste capítulo será apresentada uma breve revisão de Probabilidade, abrangendo alguns tópicos mais fundamentais. As principais referências deste capítulo são [5, 6, 11, 12].

Uma das principais aplicações das técnicas de contagem é o cálculo de probabilidade em jogos de azar. Grandes matemáticos se interessaram em sistematizar a probabilidade, que tem como raízes os estudos dos jogos de azar. Um problema clássico que despertou grande interesse de matemáticos do século XV, a exemplo de Pascal e Fermat, foi o chamado “*Problema dos Pontos*”, que hoje em dia é apresentado da seguinte maneira (mais detalhes veja [11]):

Dois jogadores apostaram R\$ 10,00 cada um em um jogo de cara-e-coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro tem 3. Qual é a divisão justa da quantia apostada?

Foram situações desse tipo que deu início a teoria de probabilidade. Relacionado ao problema, parece razoável que a quantia apostada seja dividida proporcionalmente à chance de vitória de cada jogador. O cálculo destas probabilidades está baseado, como veremos mais adiante, na hipótese de que a moeda seja honesta, ou seja, que haja chances iguais em um lançamento.

Chamamos de Experimentos Aleatórios, experimentos que, repetidos em condições idênticas, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.

Definição 2.1. *Um conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral, e será denotado por Ω .*

Exemplo 2.2. *Lançar um dado e observar a face voltada para cima;*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemplo 2.3. *Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;*

$$\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}.$$

Exemplo 2.4. *Retirar uma carta de um baralho de 52 e registra o seu naipe;*

$$\Omega = \{\text{Copas}, \text{Espadas}, \text{Ouros}, \text{Paus}\}.$$

Definição 2.5. Chamaremos de evento todo subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório; e denotaremos tais eventos por letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C, \dots, X, Y, Z .

Exemplo 2.6. Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Temos o espaço amostral

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e alguns eventos:

A : ocorrência de número par; $A = \{2, 4, 6\}$.

B : ocorrência de número maior ou igual a 3; $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

C : ocorrência de número múltiplo de 3; $C = \{3, 6\}$.

Exemplo 2.7. Uma urna contém 20 bolas idênticas numeradas de 1 a 20. Uma bola é retirada da urna e observa-se seu número. Temos o espaço amostral

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 20\}.$$

Alguns eventos são:

A : ocorrência de múltiplos de 5; $A = \{5, 10, 15, 20\}$.

B : ocorrência de números menores do que 7; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

C : ocorrência de números primos. $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Observação 2.8. Note que se Ω é um espaço amostral, então o conjunto vazio e Ω são eventos. O conjunto vazio é dito evento impossível e será denotado por \emptyset . O evento Ω é chamado de evento certo.

Observação 2.9. Considere um espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Denotaremos por $\#A$ o número de elementos de um evento A do espaço amostral Ω . Observe que $\#\Omega = k$ e Ω terá 2^k subconjuntos, portanto, 2^k eventos.

2.1 Combinação de Eventos

Consideremos Ω um espaço amostral de um experimento aleatório e A, B e E eventos de Ω .

1. União de dois eventos

$A \cup B$ é um evento que ocorre quando A ou B ocorre, ou ambos ocorrem. Dizemos que $A \cup B$ é a união do evento A com o evento B .

2. Interseção de dois eventos

$A \cap B$ é um evento que ocorre quando A e B ocorrem simultaneamente. Dizemos que $A \cap B$ é a intersecção do evento A com o evento B .

3. Complementar de um evento

E^C é um evento que ocorre quando o evento E não ocorre. Dizemos que E^C é o evento complementar de E .

Exemplo 2.10. Consideremos um tetraedro regular com faces numeradas 1, 2, 3 e 4. Ao ser lançado, consideramos como face de ocorrência a face não visível. Neste caso

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Temos os eventos:

- A : ocorrência de número ímpar, $A = \{1, 3\}$,
- B : ocorrência de número maior ou igual a 2, $B = \{2, 3, 4\}$.

Então, teremos as seguintes combinações:

- $A \cup B$: ocorrência de número ímpar ou número maior ou igual a 2,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

- $A \cap B$: ocorrência de número ímpar e número maior ou igual a 2,

$$A \cap B = \{3\}.$$

- A^C : ocorrência de um número não ímpar,

$$A^C = \{2, 4\}.$$

- B^C : ocorrência de um número menor que 2,

$$B^C = \{1\}.$$

2.2 Frequência Relativa

Em experimentos aleatórios podemos não saber qual evento irá ocorrer, mas podemos relacionar aos eventos *valores* que dêem uma *ideia quantitativa* da ocorrência dos mesmos, isso quando o experimento é repetido muitas vezes, em mesmas condições. Para tanto, vamos definir *frequência relativa de um evento*.

Considere um experimento aleatório com espaço amostral Ω , finito:

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}.$$

Agora suponha que o experimento seja repetido N vezes, com mesmas condições. Seja n_i o número de vezes que ocorre o evento $\{a_i\}$.

Definição 2.11. Para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$, chamamos de *Frequência Relativa do evento $\{a_i\}$* o valor f_i definido por

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

A *Frequência Relativa de um evento A* , denotada por f_A , é definida por

$$f_A = \sum_{a_i \in A} f_i = \sum_{a_i \in A} \frac{n_i}{N}.$$

Exemplo 2.12. Considere o lançamento de um dado 50 vezes. Temos como espaço amostral

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\},$$

onde a_i representa a face i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Se após os 50 ($N = 50$) lançamentos observarmos a face de número 2 (a_2) ocorrer 10 ($n_2 = 10$) vezes e a face de número 5 (a_5) ocorrer 20 ($n_5 = 20$) vezes, temos que a frequência relativa do evento $\{a_2\}$ é:

$$f_2 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5};$$

e a do evento $\{a_5\}$ é:

$$f_5 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Além disso, se a frequência relativa do evento $A = \{a_2, a_5\}$ é:

$$f_A = \sum_{a_i \in A} f_i = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

A frequência relativa possui as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f_i \leq 1$, $\forall i$, pois $0 \leq \frac{n_i}{N} \leq 1$.
2. $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1$, pois

$$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \dots + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

2.3 Definição de Probabilidade

A frequência relativa dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento. O que iremos fazer é definir um valor associado a cada evento, de modo que ele tenha as mesmas características da frequência relativa. A esse valor daremos o nome de *probabilidade do evento* considerado.

Considere um espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ e uma função $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$p(a_i) = p_i,$$

para cada $a_i \in \Omega$. Se

$$\sum_{i=1}^k p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1,$$

dizemos que a função p , ou os números $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, é uma *Distribuição de Probabilidade* sobre Ω e que cada p_i é a probabilidade do evento $\{a_i\}$.

Definição 2.13. Consideremos A um evento de Ω . A Probabilidade de A , que denotaremos por $P(A)$, é definida por:

1. Se $A = \emptyset$, então $P(A) = 0$;

2. Se $A \neq \emptyset$, então $P(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$.

Exemplo 2.14. Consideremos o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e a distribuição de probabilidades:

$$p_1 = 0,1 \quad p_2 = 0,3 \quad p_3 = 0,2 \quad e \quad p_4 = 0,4.$$

Para o evento $A = \{a_1, a_2, a_4\}$, por definição, temos:

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_4 = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8.$$

Exemplo 2.15. Um dado é lançado e observado o número da face voltada para cima. Temos

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Uma atribuição razoável para p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 é:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}.$$

Nesse caso, a probabilidade de ocorrência de números primos ($A = \{2, 3, 5\}$) será:

$$P(A) = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2.4 Propriedades de Probabilidades em Espaço Amostral Finito.

Propriedade 1: A probabilidade do evento certo é 1.

Propriedade 2: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Propriedade 3: Se A é um evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$.

Propriedade 4: Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Propriedade 5: Se A é um evento, então $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Observação 2.16. Para o leitor que deseje ver as demonstrações das propriedades acima, as mesmas podem ser encontradas, por exemplo, em [6].

2.5 Espaços Amostrais Equiprováveis

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ um espaço amostral, com distribuição de probabilidades $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$.

Definição 2.17. Dizemos que uma distribuição de probabilidades sobre Ω é Equiprovável quando

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_k.$$

Em geral, as características do experimento é que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.

Exemplo 2.18. *De uma urna com dez bolas de cores distintas, uma delas é retirada. É razoável supor que cada evento elementar tenha a mesma probabilidade. Como temos 10 elementos no espaço amostral, então a probabilidade de qualquer bola ser retirada é*

$$p = \frac{1}{10}.$$

2.6 Probabilidade de um Evento num Espaço Equiprovável

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ um espaço amostral com uma distribuição equiprovável $p_i = \frac{1}{k}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Seja A o evento:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_r\}.$$

Temos

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_r = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} = \frac{r}{k},$$

ou seja, num espaço Ω , com distribuição equiprovável,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Exemplo 2.19. *De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de paus?*

Solução:

Considerando que 2_c (significa dois copas), 2_e (significa dois de espadas), \dots , A_e (significa as de espadas), A_p (significa as de paus), temos que o espaço amostral do experimento é:

$$\Omega = \{\{2_c, 2_e\}, \{2_c, 2_p\}, \dots, \{A_e, A_p\}\},$$

ou seja, podemos montar cada par de cartas como sendo uma combinação das 52 cartas do baralho tomadas duas a duas. Então o total de elementos de Ω é

$$\#\Omega = C_{52,2} = \frac{52!}{(52-2)!2!} = 1326.$$

Agora seja A o evento formado pelas combinações de cartas de paus. Logo, o número de elementos de A é

$$\#A = C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)!2!} = 78.$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{78}{1326} = \frac{39}{663} = \frac{1}{7}.$$

2.7 Probabilidade Condicional

Definição 2.20. Dados dois eventos A e B , com $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B na certeza de A , denotada por $P(B|A)$, é o número

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemplo 2.21. Consideremos o lançamento de um dado e observemos a face voltada para cima. Qual a probabilidade de ocorrer um número par sabendo-se que ocorreu um número maior do que 2?

Solução:

Seja A o evento “ocorrer um número maior do que 2” e B o evento “ocorrer um número par”. Então $\#A = 4$ e $\#B = 3$. Se $A \cap B$ é o evento ocorrer um número par maior do que 2, então $\#(A \cap B) = 2$. Portanto,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Observação 2.22. Em muitos problemas é muito comum a necessidade do cálculo de $P(A \cap B)$. Neste caso, pela Definição 2.20, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

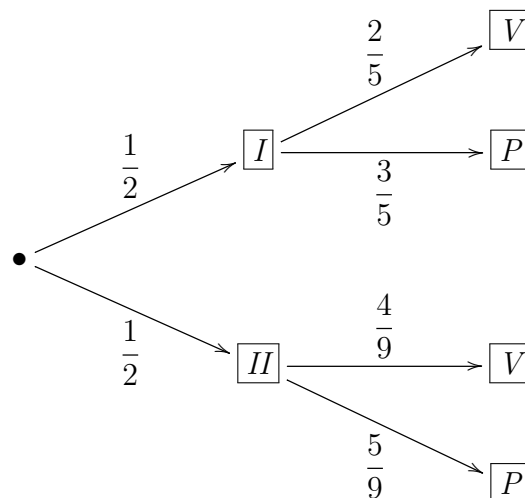
e

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Exemplo 2.23. Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas pretas e uma urna II contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída também ao acaso. Qual a probabilidade de ocorrer a urna I e uma bola vermelha?

Solução:

Vamos colocar o problema na forma de diagrama de árvore. Como uma urna é escolhida ao acaso, temos que a probabilidade de escolha de uma urna é $\frac{1}{2}$. Dada a escolha da urna, partimos para a escolha condicional: extrair uma bola de determinada cor.



As probabilidades são colocadas nas ramificações que partem de cada urna para cada resultado do 2º experimento (extração de uma bola). Temos que o espaço amostral do experimento é

$$\Omega = \{(I, V_1), (I, V_2), (I, P_1), (I, P_2), (I, P_3), (II, V_3), \dots, (II, V_6), (II, P_4), \dots, (II, P_8)\}$$

onde as letras V e P representam as cores das bolas vermelhas e pretas, respectivamente. Agora sejam:

- $A = \{(I, V_1), (I, V_2), (I, P_1), (I, P_2), (I, P_3)\}$: o evento escolher urna I ;
- $B = \{(I, V_1), (I, V_2), (II, V_3), \dots, (II, V_6)\}$: o evento escolher bola vermelha.

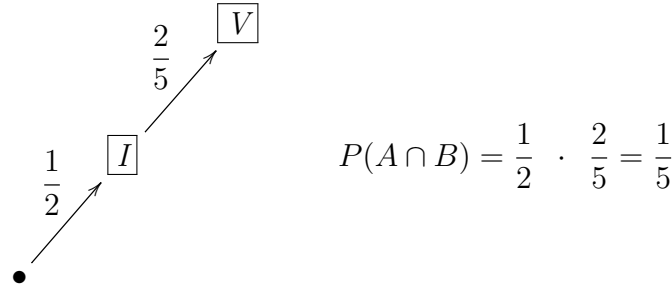
Note que estamos interessados no evento $A \cap B$. Logo, pela Observação 2.22:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Como $P(A) = \frac{1}{2}$ é a probabilidade de escolha da urna I e $P(B|A) = \frac{2}{5}$ é a probabilidade de extração de uma bola vermelha dado que ela seja da urna I , temos

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Observe que a probabilidade da ocorrência de $A \cap B$ é o produto das probabilidades que aparecem nos ramos da árvore que estão situados I e V .



2.8 Independência de Dois Eventos

Definição 2.24. Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω , dizemos que A é independente de B quando

$$P(A|B) = P(A).$$

A definição anterior, em outras palavras, nos diz que A é independente de B quando a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A .

Teorema 2.25. Considere dois eventos A e B de um espaço amostral Ω , com $P(A) \neq 0$. Se A é independente de B , então B independente de A , isto é,

$$P(B|A) = P(B).$$

Demonstração. Pela Observação 2.22, temos que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

□

Definição 2.26. Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω , dizemos que A e B são independentes quando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observação 2.27. Note que se A é independente de B e $P(A) \neq 0$, então pelo Teorema 2.25 e Observação 2.22 temos

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{P(B)} = P(A) \cdot P(B).$$

Logo, A e B são independentes.

Exemplo 2.28. Uma moeda perfeita é lançada duas vezes. Considerando os eventos:

- A : sair cara na 1ª jogada;
- B : sair cara na 2ª jogada.

Verifique que os eventos A e B são independentes.

Solução:

Considere C (cara) e K (coroa), então o espaço amostral é

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$$

e os eventos são

$$A = \{CC, CK\} \quad B = \{CC, KC\} \quad e \quad A \cap B = \{CC\}.$$

Então:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad e \quad P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{1}{4}.$$

Logo, como $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, com $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, temos que os eventos A e B são independentes.

Exemplo 2.29. Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a 1ª pessoa atingir o alvo é $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de a 2ª atingir o alvo é $\frac{2}{3}$. Considerando os eventos $A = \{1^\text{a} \text{ pessoa atingir o alvo}\}$ e $B = \{2^\text{a} \text{ pessoa atingir o alvo}\}$, e admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

1. ambos atingirem o alvo?

2. *ao menos um atingir o alvo?*

Solução:

1. Temos $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$. A probabilidade de ambos atingirem o alvo é $P(A \cap B)$. Então,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

2. A probabilidade de ao menos um atingir o alvo é $P(A \cup B)$. Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Capítulo 3

Cadeias de Markov, Grafos e Grafos Dirigidos

O presente capítulo foi baseado nas referências [2, 3, 9]. Caso o leitor deseje obter mais detalhes, pode consultar qualquer uma dessas referências citadas.

3.1 Cadeias de Markov

Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno estudado passasse, a partir de um estado inicial, por uma sequência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade. No caso em que esta probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado seguinte, o processo é chamado Processo de Markov e uma sequência de estados seguindo este processo é denominada de Cadeia de Markov.

Evidentemente, ao se supor tal restrição, estaremos simplificando, talvez até demasiadamente, uma vez que as probabilidades podem modificar com o tempo. Mas, assim mesmo, a informação que obtivermos com este modelo já nos servirá de auxílio para uma previsão do comportamento de certos fenômenos.

Exemplo 3.1. *Vamos assumir que em uma determinada região observa-se os seguintes dados estatísticos:*

Dados Estatísticos:

- *Se chover - C bastante em um ano, a probabilidade de chover bastante no ano seguinte é $\frac{1}{4}$ e a de ter seca - S é $\frac{3}{4}$.*

Notação:

$$P(C) = \frac{1}{4} \quad e \quad P(S) = \frac{3}{4}.$$

- *Se tiver seca em um ano, a probabilidade de chover bastante no ano seguinte é de $\frac{1}{2}$ e a de seca é $\frac{1}{2}$.*

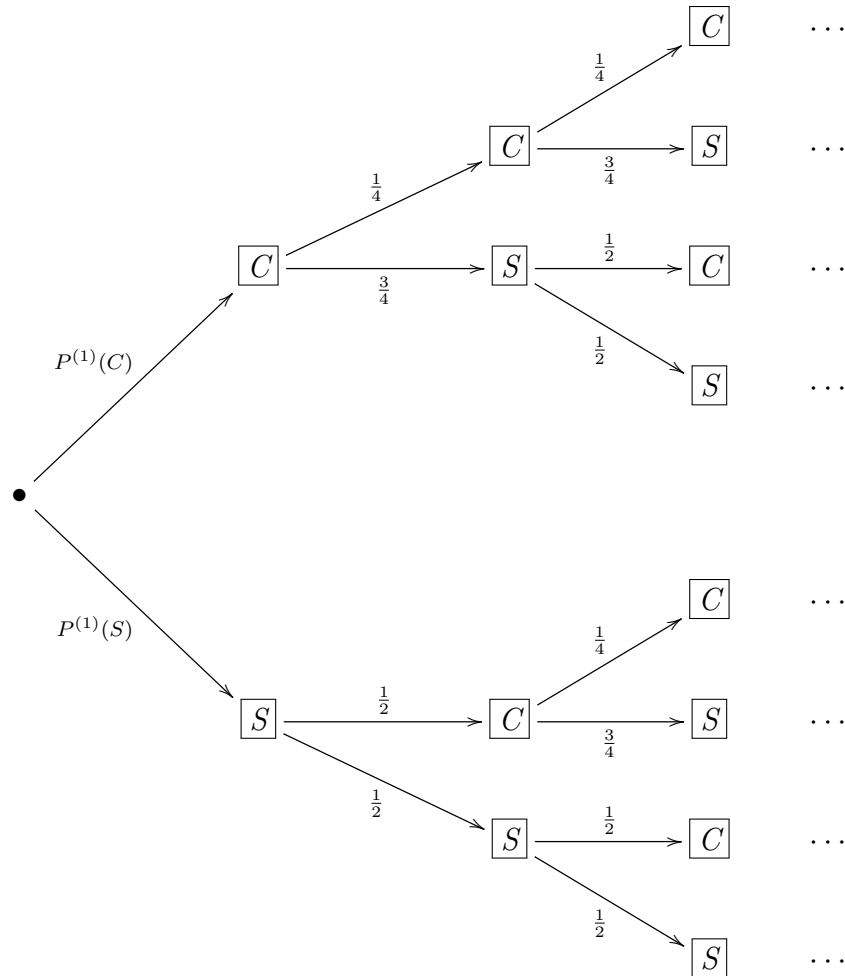
Notação:

$$P(C) = \frac{1}{2} \quad e \quad P(S) = \frac{1}{2}.$$

Hipótese: As probabilidades não mudam com o decorrer dos anos.

Previsão: Sabendo-se que no primeiro ano houve seca, qual a probabilidade de chover bastante no terceiro ano?

Considere a Árvore de Probabilidades abaixo:



Observe que a probabilidade de chover no terceiro ano é portanto:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Questão-1: Se necessitarmos saber a probabilidade daqui a algumas décadas?

Para responder a questão, vamos analisar a partir da “Árvore de Probabilidades”. Denotemos

- $P^n(C)$: Probabilidade de chover no n -ésimo ano;
- $P^n(S)$: Probabilidade de seca no n -ésimo ano;

e consideremos a tabela de probabilidades onde o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna indica a probabilidade de transição do j -ésimo para i -ésimo estado.

$$\begin{array}{c|cc} & C & S \\ \hline C & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ S & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

O vetor de probabilidade é a matriz

$$\begin{bmatrix} P^n(C) \\ P^n(S) \end{bmatrix},$$

onde a primeira linha dá a probabilidade de que haja chuva no n -ésimo ano e a segunda linha dá a probabilidade de que haja seca no n -ésimo ano. Agora, analisando a árvore de probabilidade vemos que

$$\begin{aligned} P^2(C) &= \frac{1}{4} \cdot P^1(C) + \frac{1}{2} \cdot P^1(S) \\ P^2(S) &= \frac{3}{4} \cdot P^1(C) + \frac{1}{2} \cdot P^1(S), \end{aligned}$$

e esse resultado pode ser observado na forma matricial

$$\begin{bmatrix} P^2(C) \\ P^2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot P^1(C) + \frac{1}{2} \cdot P^1(S) \\ \frac{3}{4} \cdot P^1(C) + \frac{1}{2} \cdot P^1(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P^1(C) \\ P^1(S) \end{bmatrix}.$$

Denotando por T a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

temos de modo análogo o cálculo do segundo para o terceiro ano, do terceiro para o quarto e assim por diante. Vejamos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P^1(C) \\ P^1(S) \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} P^2(C) \\ P^2(S) \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} P^1(C) \\ P^1(S) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} P^3(C) \\ P^3(S) \end{bmatrix} &= T \cdot \begin{bmatrix} P^2(C) \\ P^2(S) \end{bmatrix} = T^2 \cdot \begin{bmatrix} P^1(C) \\ P^1(S) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e sucessivamente

$$\begin{bmatrix} P^n(C) \\ P^n(S) \end{bmatrix} = T^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} P^1(C) \\ P^1(S) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Questão 2: Qual o comportamento do clima dessa região a longo prazo?

1. Se soubermos que T^n se tornará uma matriz fixa P , quando n é muito grande, teremos:

$$P \cdot \begin{bmatrix} P^1(C) \\ P^1(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(C) \\ P(S) \end{bmatrix};$$

em linguagem de limites, quando $n \rightarrow \infty$, teremos:

$$T^n \rightarrow P, \quad P^n(C) \rightarrow P(C) \text{ e } P^n(S) \rightarrow P(S).$$

2. Se T^n **não** se tornar uma matriz fixa P , não é possível qualquer previsão.

Observação 3.2. Note que, em particular, se $P(S)=1$ temos a conclusão que a longo prazo essa região se tornará um deserto.

3.1.1 Processo Aleatório de Markov

Definição 3.3. Um Processo Aleatório de Markov é um processo que pode assumir estados de forma que a probabilidade de transição de um estado para outro é dada por um número p_{ij} , onde p_{ij} depende somente dos estados envolvidos.

Notação 3.4. Em geral denotamos por $1, 2, \dots, k$ os k estados possíveis de uma Cadeia de Markov. A probabilidade do sistema está no estado i em qualquer observação se na observação imediatamente precedente estava no estado j , é denominada por p_{ij} e é chamada de **Probabilidade de Transição** do estado j ao estado i . A matriz $P = [p_{ij}]$ é chamada de **Matriz de Transição** da Cadeia de Markov.

Exemplo 3.5. Uma locadora de automóveis tem três lojas de atendimento, denotas por 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três lojas e devolver o carro para qualquer uma das três lojas. O gerente nota que os clientes costumam devolver os carros de acordo com as seguintes probabilidades:

Alugado da Loja				
1	2	3		
$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}$	1	2	3	Devolvido
	2	à		
	3	Loja		

Esta matriz é a matriz de transição do sistema se ele for considerado uma Cadeia de Markov. A partir desta matriz, a probabilidade que um carro alugado na loja 3 vá ser devolvido na loja 2 é de 0,6, a probabilidade que um carro alugado na loja 1 vá ser devolvido na loja 1 é de 0,8, e assim para o restante das entradas.

Exemplo 3.6. Conferindo os registros de doações recebidas, a secretaria da associação de ex-alunos de uma universidade norte-americana observa que 80% de seus ex-alunos que contribuem ao fundo da associação em um certo ano também contribuem no ano seguinte e que 30% dos que não contribuem em um certo ano contribuem no ano seguinte. Isto pode ser visto com uma cadeia de Markov de dois estados: o estado 1 corresponde a um ex-aluno que contribui em um ano qualquer e o estado 2 corresponde a um ex-aluno que não contribui naquele ano. A matriz de transição é

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz P também é uma Matriz de Transição.

As matrizes de transições das Cadeias de Markov têm a propriedade que as entradas em qualquer coluna somam 1. Mas isto não é coincidência, considerando

que se $P = [p_{ij}]$ é uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov qualquer de k estados, então para cada j nós devemos ter

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{kj} = 1,$$

pois se o sistema está no estado j em uma observação, é certo que estará em um dos k estados possíveis na próxima observação.

Nos dois exemplos anteriores poderíamos fazer uma previsão da devolução de um carro alugado em uma das três lojas após k alugueis, ou a previsão da doação de um ex-aluno após k anos à Universidade.

3.1.2 Vetor e Matriz de Probabilidade

Definição 3.7. *Uma matriz da forma*

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

é dita um Vetor de Probabilidade quando

$$p_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k \quad e \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

.

Definição 3.8. *Uma matriz*

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

é chamada de Matriz de Probabilidade ou Estocástica quando cada coluna é um Vetor de Probabilidade.

Observação 3.9. 1. Dada uma matriz de probabilidade $P = [p_{ij}]$, temos que

- (a) $p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\};$
- (b) $\sum_j p_{i,j} = 1, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}.$

2. Seguindo o raciocínio desenvolvido para obter (3.1), obtemos

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ \vdots \\ p_k^{(n)} \end{bmatrix} = T^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ \vdots \\ p_k^{(1)} \end{bmatrix}.$$

3.1.3 O Vetor-estado

Em geral não se pode determinar com certeza o estado de um sistema em uma Cadeia de Markov numa observação arbitrária. O máximo que se pode fazer é especificar probabilidades para cada um dos estados possíveis. Poderíamos descrever o estado possível do sistema em uma certa observação em uma Cadeia de Markov com k estados, por um vetor-coluna

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

(probabilidade de que a cadeia esteja no estado j depois de n passos) no qual x_1 é a probabilidade que o sistema está no estado 1, x_2 é a probabilidade que ele está no estado 2, x_3 é a probabilidade que ele está no estado 3 e x_k é a probabilidade que ele está no estado k . Em geral, temos a seguinte definição.

Definição 3.10. *O Vetor – estado de uma observação de uma Cadeia de Markov com k estados é um vetor-coluna $\mathbf{x}^{(n)}$ cujo i -ésimo componente x_i é a probabilidade do sistema estar, naquela observação, no i -ésimo estado.*

Note que as entradas em qualquer Vetor-estado de uma Cadeia de Markov são não negativos e têm sempre soma 1 (vetor de Probabilidade). Suponhamos que saibamos o vetor-estado $\mathbf{x}^{(0)}$ de uma Cadeia de Markov em alguma observação inicial. Com argumento análogo ao desenvolvido para obter (3.1) pode-se determinar os Vetores-estados

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}, \dots$$

Teorema 3.11. *Se P é a matriz de transição de uma Cadeia de Markov e $\mathbf{x}^{(n)}$ é um Vetor-estado na n -ésima observação, então*

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = P^n \mathbf{x}^{(0)}$$

De modo iterativo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = P^2\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = P^3\mathbf{x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(n)} &= P\mathbf{x}^{(n-1)} = P^{n-1}\mathbf{x}^{(0)} \end{aligned}$$

Dessa forma, o Vetor-estado inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e a matriz de transição P determinam $\mathbf{x}^{(n)}$ para $n = 1, 2, \dots$

Exemplo 3.12. *Para ilustrar a recorrência, consideremos a matriz de transição do Exemplo 3.6:*

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora construir um registro futuro de provável doação de um novo graduado que não doou no 1º ano após a formatura. Para um tal graduado, o sistema está, inicialmente, com certeza no estado 2, de modo que o vetor-estado inicial é

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00000 \\ 1,00000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30000 \\ 0,70000 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,30000 \\ 0,70000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45000 \\ 0,55000 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,45000 \\ 0,55000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,52500 \\ 0,47500 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, passados três anos, pode-se esperar com probabilidade 0,525 que o ex-aluno irá fazer uma doação. Depois de três anos, obtemos os seguintes vetores-estado (com até cinco casas decimais e usando o programa computacional livre “WINMAT” para os cálculos):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} 0,56250 \\ 0,43750 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,58125 \\ 0,41875 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,59062 \\ 0,40938 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(7)} &= \begin{bmatrix} 0,59531 \\ 0,40469 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(8)} = \begin{bmatrix} 0,59766 \\ 0,40234 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} 0,59883 \\ 0,40117 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(10)} &= \begin{bmatrix} 0,59942 \\ 0,40058 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0,59971 \\ 0,40029 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(12)} = \begin{bmatrix} 0,59985 \\ 0,40015 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quando os valores de n vão crescendo os valores do Vetor-estado vão se aproximando de um vetor constante, isto é, por exemplo, para $n \geq 20$, temos

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60000 \\ 0,40000 \end{bmatrix}.$$

Simbolicamente, podemos representar $x_1^{(n)} \rightarrow 0,60000$ e $x_2^{(n)} \rightarrow 0,40000$ quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 3.13. No Exemplo 3.12 deve-se destacar que foi possível determinar o comportamento limite devido a matriz P possuir uma determinada propriedade especial. De fato, por exemplo, se considerarmos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos $P^2 = I$ e $P^3 = P$ de maneira que

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(5)} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema oscila indefinidamente entre os dois vetores-estados

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e assim não converge como no caso anterior.

A observação anterior obriga uma restrição à matriz de transição, que veremos na próxima subseção.

3.1.4 Matriz Regular

Definição 3.14. *Uma matriz de transição é dita **regular** quando uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.*

Trabalhando com matrizes regulares podemos verificar que o sistema se aproxima de um vetor-estado fixo. Assim, para uma matriz de transição regular P , existe um número inteiro m tal que todas as entradas de P^m são positivas.

Uma Cadeia de Markov que é regida por uma matriz de transição regular é chamada de **Cadeia de Markov Regular**. Apresentaremos a seguir um teorema que garante que qualquer Cadeia de Markov Regular possui um vetor-estado fixo q tal que, para qualquer escolha de $X^{(0)}$, o vetor $P^n X^{(0)}$ converge para q quando n aumenta. Este resultado é da grande importância na teoria de Cadeia de Markov.

Teorema 3.15. *Seja*

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se P é uma matriz transição regular, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_n & q_n & \cdots & q_n \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde os q_i são números não negativos tais que $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$.

Observação 3.16. *A igualdade (3.2) (Limite das Potências de P), para efeito de entendimento e uso, pode ser considerada como:*

“cada P_{ij} é tão próximo de q_i quanto se deseje, a medida k é suficientemente grande”.

Exemplo 3.17. *Considere a matriz*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que P é regular e determine o limite das potências de P com 2 casas decimais. Para tanto, fazendo as contas, temos:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad P^6 = \begin{bmatrix} 13/54 & 1/12 & 1/9 & 11/36 \\ 5/108 & 1/9 & 11/108 & 1/36 \\ 1/3 & 11/18 & 59/108 & 2/9 \\ 41/108 & 7/36 & 13/54 & 4/9 \end{bmatrix}.$$

Assim, como P^6 possui todas as entradas positivas, tem-se que P é uma matriz de probabilidade regular. Seguindo com os cálculos das potência, temos uma aproximação com duas casas decimais que

$$P^{50} = \begin{bmatrix} 0,20002 & 0,19994 & 0,19996 & 0,20005 \\ 0,06666 & 0,06669 & 0,06668 & 0,06665 \\ 0,39997 & 0,40009 & 0,40007 & 0,39992 \\ 0,33335 & 0,33327 & 0,33329 & 0,33338 \end{bmatrix}.$$

Portanto, de forma intuitiva, com aproximação de duas casas decimais, podemos escrever

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,20 & 0,20 & 0,20 \\ 0,07 & 0,07 & 0,07 & 0,07 \\ 0,40 & 0,40 & 0,40 & 0,40 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

3.1.5 O Vetor Estado Estacionário

Denotemos por

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}.$$

Consideremos Q uma matriz de transição com todos colunas iguais ao vetor de probabilidade \mathbf{q} . A matriz Q tem a seguinte propriedade: se \mathbf{x} é qualquer vetor de probabilidade, então

$$\begin{aligned} Q\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & q_n & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_n \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_n \\ \vdots \\ q_nx_1 + q_nx_2 + \cdots + q_nx_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = 1\mathbf{q} = \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Isto mostra que Q transforma qualquer vetor de probabilidade \mathbf{x} num vetor de probabilidade \mathbf{q} fixo. Isto leva ao próximo teorema:

Teorema 3.18. Se P é uma matriz de transição regular e \mathbf{x} é um vetor de probabilidade qualquer então

$$P^k \cdot \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$$

quando $k \rightarrow \infty$, onde \mathbf{q} é um vetor de probabilidade fixo, independente de k , cujas entradas são todas positivas.

Este teorema é uma consequência do Teorema 3.15. De fato, temos $P^k \rightarrow Q$ quando $k \rightarrow \infty$, de modo que $P^k \mathbf{x} \rightarrow Q \mathbf{x} = \mathbf{q}$ (note que $Q \mathbf{x} = \mathbf{q}$ qualquer que seja \mathbf{x} um vetor de probabilidade) quando $k \rightarrow \infty$. Assim, para uma Cadeia de Markov Regular, o sistema sempre acaba convergido para um vetor-estado \mathbf{q} fixo. O vetor \mathbf{q} é chamado vetor de estado estacionário da Cadeia de Markov Regular.

Uma técnica muito eficiente de calcular o vetor de estado estacionário \mathbf{q} de sistemas com muitos estados, é simplesmente calcular $P^n \mathbf{x}$ para algum n grande. Uma outra maneira de calcular o vetor de estado estacionário é utilizar o próximo teorema.

Teorema 3.19. O Vetor de estado estacionário \mathbf{q} de uma matriz de transição regular P é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$.

A verificação do Teorema 3.19 segue do Teorema 3.15. De fato, por definição temos a identidade matricial $PP^k = P^{k+1}$. Então, pelo Teorema 3.15, temos P^k e P^{k+1} convergem a Q quando $k \rightarrow \infty$, de modo que $PQ = Q$. Em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

nos permite concluir que

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix},$$

isto é, $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$. Para mostrar que \mathbf{q} é o único vetor de probabilidade que satisfaz esta equação, suponha que \mathbf{r} é um outro vetor de probabilidade tal que $P\mathbf{r} = \mathbf{r}$. Então,

$$P^2 \mathbf{r} = \mathbf{r}, \dots, P^k \mathbf{r} = \mathbf{r},$$

para $k = 1, 2, \dots$. Pelo Teorema 3.18, quando $k \rightarrow \infty$, resulta $\mathbf{q} = \mathbf{r}$.

Podemos escrever o sistema linear $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$ como o sistema linear homogêneo

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q} \Rightarrow P\mathbf{q} - I\mathbf{q} = I\mathbf{q} - I\mathbf{q} \Rightarrow (P - I)\mathbf{q} = 0.$$

Assim, o Teorema 3.19 também pode ser expresso da seguinte maneira: o sistema linear homogêneo

$$(P - I)\mathbf{q} = 0.$$

tem um único vetor-solução \mathbf{q} com entradas não-negativas que satisfazem a condição $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Exemplo 3.20. Considere uma Cadeia de Markov com matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Encontre o Vetor Estado Estacionário para essa Cadeia de Markov.

Solução: Observe que P ainda não pode ser considerada regular, pois devemos ter um m de modo que P^m tenha todos os elementos positivos. Como

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix},$$

segue que P é regular. Para determinarmos o Vetor Estado Estacionário devemos resolver a equação $(P - I)\mathbf{q} = 0$. Como

$$P - I = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

e o escalonamento da matriz aumentada fornece

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que a solução geral é $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, t um número real. Como \mathbf{q} deve ser um vetor

de probabilidade, então se escolhermos $t = \frac{1}{3}$ para obter $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

3.2 Grafos

Atualmente a Teoria dos Grafos é uma das áreas mais importantes da matemática discreta. O seu uso não se restringe somente a essa área, tendo aplicações em Química, Informática, Economia, Sociologia, Genética, etc. Seu surgimento se deu na resolução do problema das pontes de Königsberg em 1736 por Euler. Hoje, um grafo constitui um modelo ideal para estudo das relações entre objetos discretos de qualquer natureza.

Existem inúmeros exemplos de situações que dão origem a conjunto com um número finito de elementos nos quais existe alguma relação entre os elementos do conjunto.

Exemplo 3.21. Suponhamos que numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de volei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Digamos que até um dado momento tenham sido realizados alguns jogos:

- 6A jogou com 7A, 7B, 8B
- 6B jogou com 7A, 8A, 8B
- 7A jogou com 6A, 6B
- 7B jogou com 6A, 8A, 8B
- 8A jogou com 6B, 7B, 8B
- 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A.

Podemos representar a situação por um conjunto

$$V = \{6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B\}.$$

A relação “6A jogou com 7A” pode ser representada por $(6A, 7A)$, por exemplo, assim como as demais relações são representadas de forma análoga, de modo que temos o conjunto das relações

$$A = \{(6A, 7A), (6A, 7B), (6A, 8B), (6B, 7A), (6B, 8A), \dots, (7B, 8B), (8A, 8B)\}.$$

Uma maneira de representar a situação é através de uma figura onde as turmas serão representadas por pontos e os jogos serão representados por linhas (ver Figura 3.21).

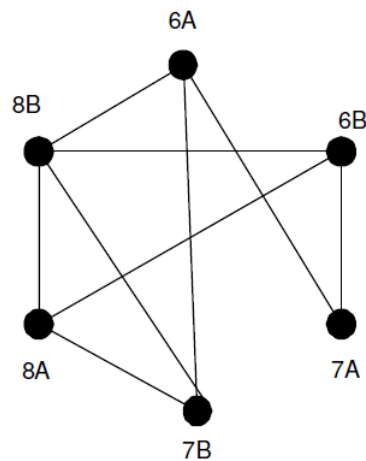


Figura 3.1: Representação Gráfica dos Jogos

O exemplo anterior motiva a definição de um grafo.

Definição 3.22. Um Grafo G é um par (V, A) , onde V é um conjunto não-vazio e A é um conjunto formado por pares ordenados da forma (v_i, v_j) , com $v_i, v_j \in V$. Os elementos de V são chamados vértices e os pares ordenados são chamados de arestas do grafo.

Não é difícil agora constatar a consistência das informações. A estrutura “grafo” admite várias maneiras de ser representada. Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são **Adjacentes** e que a aresta é **Incidente** aos vértices. De modo geral, denotamos o número de vértices pelo símbolo $|V|$ e o número de arestas pelo símbolo $|A|$. No exemplo anterior $|V| = 6$ e $|A| = 9$.

Observação 3.23. *Note que a definição não impede que o conjunto de vértices de um grafo seja infinito. Mas esse tipo de grafo não será estudado no presente trabalho.*

Grau de um Vértice

No Exemplo 3.21 observa-se que cada turma jogou um número diferente de jogos:

- 6A jogou 3 jogos
- 6B jogou 3 jogos
- 7A jogou 2 jogos
- 7B jogou 3 jogos
- 8A jogou 3 jogos
- 8B jogou 4 jogos

isso nos leva também a observar (ver Figura 3.21), que o vértice 6A tem 3 arestas ligadas a ele, o vértice 7A tem 2 arestas ligadas a ele e similarmente os demais. Dizemos então que estas arestas são **incidentes** ao vértice.

Definição 3.24. *Dado um vértice v de um grafo, o **Grau do Vértice** v é o número de vezes que as arestas incidem sobre o respectivo vértice. O grau de um vértice v é denotado por $d(v)$.*

No Exemplo 3.21, temos por exemplo $d(6A) = 3$ e $d(7A) = 2$.

Observando o Exemplo 3.21, pode verificar que a soma dos graus de um grafo é sempre o dobro do número de arestas e isso não é coincidência. Isso pode ser escrito em linguagem matemática. Para tanto, dado um grafo G , denotaremos por $V(G)$ e $A(G)$, respectivamente, os conjuntos dos vértices e das arestas de G .

Teorema 3.25. *Para todo grafo G*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|A|.$$

Em palavras: “A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas”.

Demonstração. Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. \square

Corolário 3.26. *Todo grafo G possui um número par de vértice de grau ímpar.*

Demonstração. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par. \square

Observações sobre a Definição de Grafos

Perguntas acerca da Definição de Grafo podem nos deixar atrapalhados e com dúvidas. Para evitar possíveis situações de confusão, vamos ilustrar algumas delas com alguns exemplos:

- Uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo?
Pode. É o que chamamos de **Laço**. Por exemplo, vamos considerar o grafo em que $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ que é apresentado na Figura 3.2.

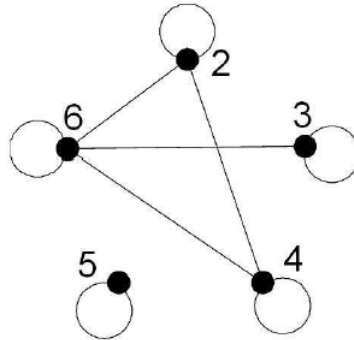


Figura 3.2: Grafo com Laços

Pela definição do grafo (Figura 3.2), vemos que o vértice 5, por exemplo, não está ligado a nenhum outro vértice mas tem um laço (como aliás todos os outros vértices deste grafo). Para haver coerência com os resultados anteriores, temos que contar o laço duas vezes (uma para cada extremidade) quando calcularmos o grau do vértice. Portanto, para o grafo da Figura 3.2, temos:

$$d(2) = 4, \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 4, \quad d(5) = 2 \quad \text{e} \quad d(6) = 5;$$

e teorema sobre o grau de vértice continua valendo.

- Dois vértices podem estar por uma mesma aresta?
Pode. Neste caso usamos o nome especial de **Multigrafo**. Por exemplo, a situação problema das pontes de Königsberg resulta no grafo da Figura 3.3.
Grafos sem laços ou arestas múltiplas são chamados de **Grafos Simples**.

- A Figura 3.4 mostra um grafo ou dois grafos?

A resposta é que muitas vezes depende da situação. Em princípio, parecem dois grafos distintos, e podemos considerá-los assim. Mas podemos pensar que esse grafo representa as ligações entre casas de uma cidade onde passa um rio (veja o grafo ilustrando a situação na Figura 3.5). Se as pontes forem destruídas em um temporal a cidade ainda é uma só, apenas foi **desconectada**.

Os grafos podem ser classificados em **conexo** ou **desconexo**. Dizemos que um grafo é **Conexo** se qualquer par de pontos é ligado por ao menos uma aresta.

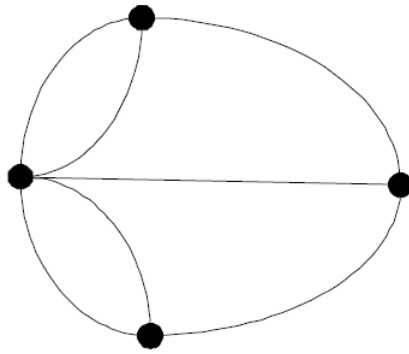


Figura 3.3: Grafo de Königsberg

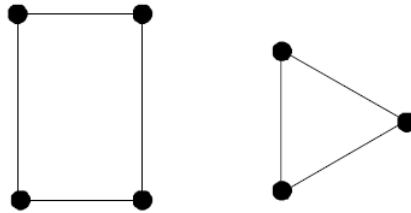


Figura 3.4: Um ou dois grafos?

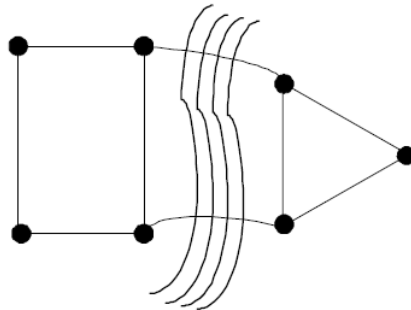


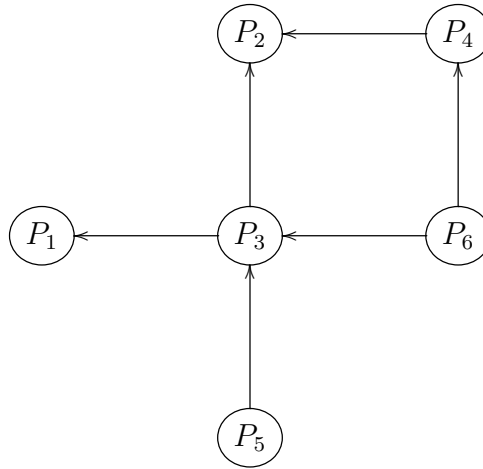
Figura 3.5: Grafos unidos

3.2.1 Grafos Dirigidos

Definição 3.27. Um Grafo Dirigido é um conjunto finito de elementos $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ junto com uma coleção finita de pares ordenados (P_i, P_j) de elementos distintos deste conjunto, sem repetição de pares ordenados. Os elementos do conjunto são chamados vértices e os pares ordenados arestas dirigidas do grafo.

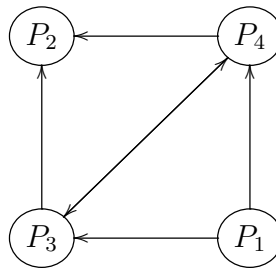
Para indicarmos que P_j recebe uma conexão de P_i usamos a simbologia $P_i \rightarrow P_j$, e isso indica que a aresta (P_i, P_j) pertence ao grafo.

Exemplo 3.28. *Vejam os uma representação gráfica de um grafo dirigido:*



Caso dois vértices recebam conexões mutuamente, ou seja, $P_i \rightarrow P_j$ e $P_j \rightarrow P_i$, usaremos a representação $P_i \leftrightarrow P_j$.

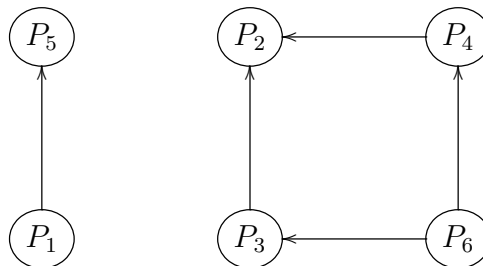
Exemplo 3.29. *Observando o grafo abaixo*



notamos que os vértices P_3 e P_4 possuem conexões mutuamente.

Podemos também ter grafos dirigidos com componentes separadas.

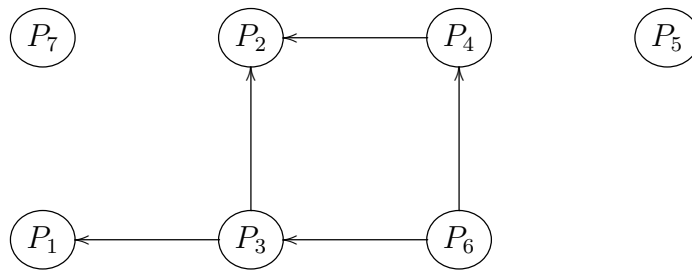
Exemplo 3.30. *Observando o grafo a seguir*



notamos uma componente formada pelos vértices P_1 e P_5 e outra formada pelos vértices P_2, P_3, P_4 e P_6 .

Pode ainda ocorrer vértices isolados, ou seja, vértices que não recebem conexões de nenhum outro.

Exemplo 3.31. No grafo



nota-se os vértices P_5 e P_7 isolados.

Observação 3.32. Note que se num grafo dirigido algum vértice não receber conexão de nenhuma outro, significa dizer que ali se formou um laço e então a simbologia $P_i \rightarrow P_j$, com $j = i$, também faz sentido.

3.2.2 Matriz de um Grafo Dirigido

Para cada grafo dirigido de n vértices podemos associar uma matriz $n \times n$, que chamaremos de matriz de vértices do grafo dirigido.

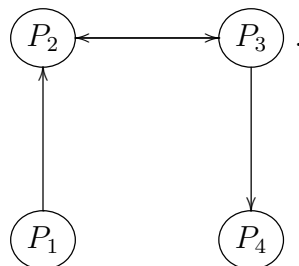
Definição 3.33. Dado um grafo dirigido, com vértices P_1, P_2, \dots, P_n , definimos a seguinte associação:

$$m_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \rightarrow P_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i, j = 1, 2, \dots, n$. A matriz $M = [m_{ji}]$ é chamada de Matriz de Vértices do Grafo Dirigido.

Vejamos alguns exemplos.

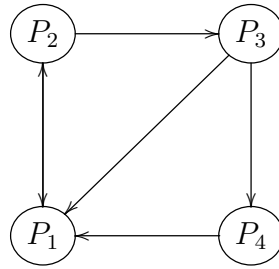
Exemplo 3.34. Considere o seguinte grafo dirigido:



Note que a matriz de vértices deste grafo dirigido é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.35. O grafo dirigido



tem como matriz dos vértices:

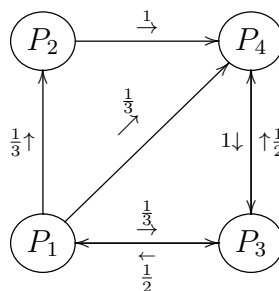
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 3.36. Note que, por definição, as matrizes de vértices de um grafo dirigido possuem a propriedades de que todas as entradas são 0 ou 1. Além disso, qualquer matriz que satisfaz essa propriedade determina um único grafo dirigido, cuja matriz de vértices é a matriz dada.

3.2.3 Passeio Aleatório Simples num Grafo Dirigido

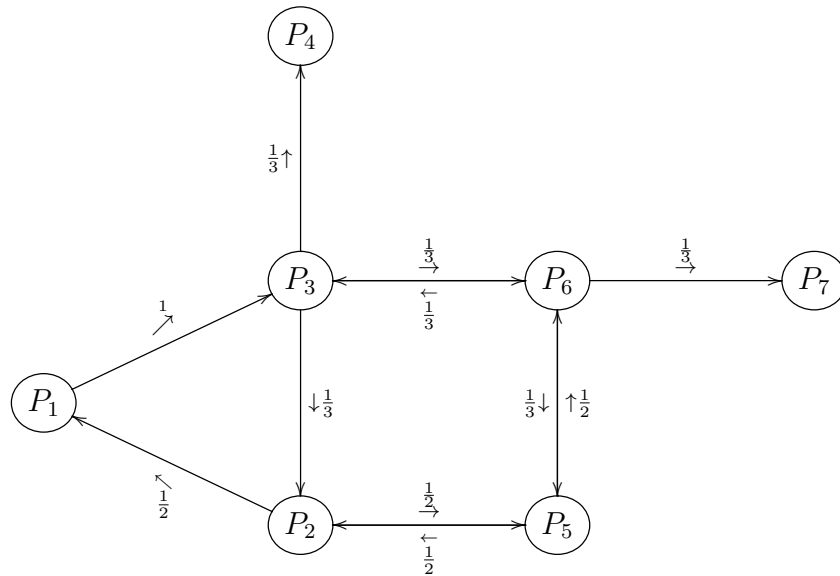
Para definir um passeio aleatório num grafo dirigido, devemos supor que um objeto se mova de vértice em vértice. Estando em um dado vértice, o objeto tem a mesma probabilidade de se mover ao longo de qualquer uma das arestas nos sentidos indicados. A esse movimento dar-se o nome de **Passeio Aleatório Simples num Grafo Dirigido**.

Exemplo 3.37. Considere o grafo dirigido



e note que, de acordo com a quantidade de setas que saem de um vértice, temos estabelecida uma probabilidade do objeto se mover. Por exemplo, no presente grafo, a probabilidade de um objeto estar no vértice P_1 e mover-se diretamente para o vértice P_4 é $\frac{1}{3}$. Observe que neste grafo, partindo de qualquer vértice, pode-se percorrer toda estrutura dele.

Exemplo 3.38. Considere o grafo dirigido



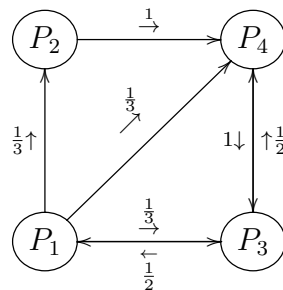
e veja que neste grafo, por exemplo, a probabilidade de um objeto estar no vértice P_5 e mover-se diretamente para o vértice P_2 é $\frac{1}{2}$. Note que diferentemente do grafo anterior, se partimos de qualquer vértice não poderemos percorrer toda sua estrutura.

3.2.4 Matriz de Probabilidade de um Passeio Aleatório Simples num Grafo Dirigido

Motivados pela noção de um grafo dirigido, introduziremos agora o conceito de matriz de probabilidade de movimento de um passeio aleatório simples num grafo dirigido.

Definição 3.39. Dado um grafo dirigido, com vértices P_1, P_2, \dots, P_n , denotamos por P_{ij} a probabilidade de um objeto está no vértice P_i e escolher dirigir-se diretamente ao vértice P_j . A matriz $M_P = [P_{ji}]$ é chamada de Matriz de Probabilidade de Transição. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.40. Considere o grafo dirigido logo abaixo:

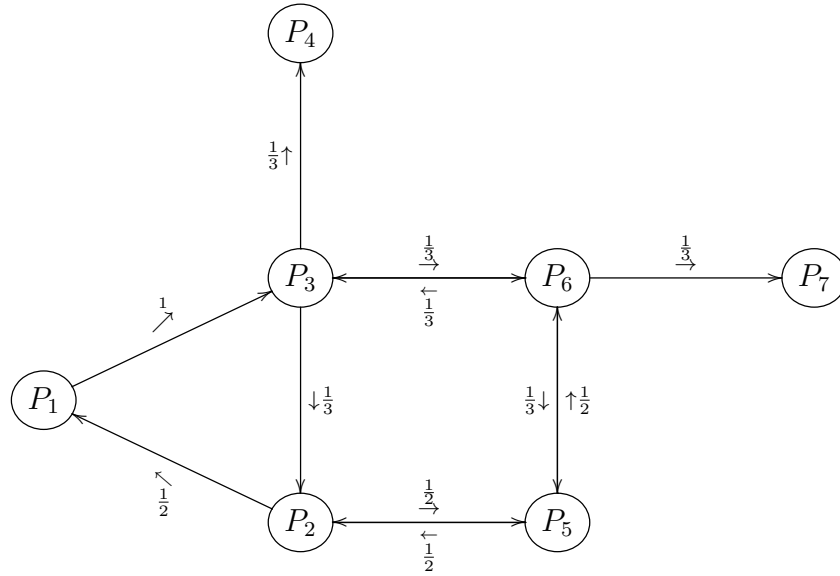


Pela definição, temos que a matriz de probabilidade de transição do grafo é dada por:

$$M_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a soma dos elementos de cada coluna resulta sempre em 1.

Exemplo 3.41. Considere novamente o grafo de um passeio aleatório como mostra a figura a seguir e também sua matriz de probabilidade do passeio aleatório:



Pela definição, temos a matriz de probabilidade do passeio aleatório:

$$M_P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Observemos mais uma vez que a soma dos elementos de cada coluna resulta também 1.

Capítulo 4

O Buscador Google

Embora o número de páginas da Web seja imenso, ainda assim é finito. Quando a estrutura de links da rede mundial de computadores (World Wide Web) é modelada por uma Cadeia de Markov, cada página na rede é um estado dessa cadeia. Neste capítulo mostraremos uma aplicação do estudo das Cadeias de Markov na estrutura dos links da Web, focando nas cadeias que estacionam após um número finito de iterações (“cliques”) partindo de um estado inicial (“página”), pois estas possuem uma aplicação específica no algoritmo PageRank – “algoritmo de busca e ranqueamento do buscador Google”. Usaremos a noção de Vetor Estado Estacionário para uma Cadeia de Markov, embora nem toda Cadeia de Markov converge para um Vetor Estado Estacionário (veja a Observação 3.13 e Exemplo 4.8). Quando uma cadeia de Markov converge para um Vetor Estado Estacionário, este vetor pode ser interpretado como a quantidade de tempo que a cadeia gastará em cada estado. Essa interpretação é necessária para o algoritmo PageRank, de modo que serão estudadas as condições sob as quais uma cadeia de Markov irá convergir para um Vetor Estado Estacionário. O modelo para a estrutura de links da rede mundial de computadores será então modificado para satisfazer essas condições, formando a chamada Matriz do Google.

O principal interesse neste trabalho é mostrar que, com o conhecimento de matemática relativamente elementar, é possível explicar coisas usuais da sociedade, fazendo esta perceber o quão a matemática está presente em seu dia-a-dia. Além disso, imagina-se que o presente trabalho possa servir para motivar alunos que estejam cursando ou concluindo o ensino médio a despertar interesse por essa disciplina, por muitos mal compreendida e negligenciada.

4.1 Funcionamento do buscador Google

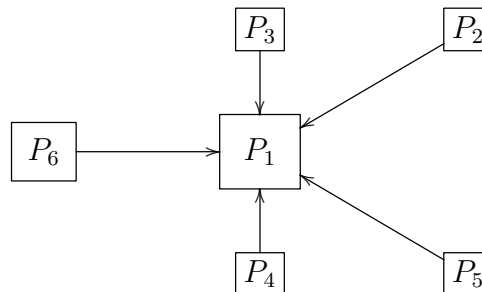
4.1.1 Conceitos Preliminares

A ferramenta de busca do Google é de fundamental importância na vida das pessoas hoje em dia. Se pensarmos como as buscas são feitas ou, como os resultados são classificados, percebemos como uma matemática relativamente básica é importante. Inicialmente, quando realizamos uma busca, o Google utiliza dois critérios: “On Page” e “Off Page”. O “On Page” basicamente usa as informações que a

página disponibiliza para classificar a sua relevância, verificando quais palavras e/ou expressões da busca estão contidas nela. Já o critério “Off Page” usa informações fora da página para classificar sua relevância, que é medida através das indicações de outras páginas sobre a página em questão. A importância de uma página é medida pelo “PageRank”, que é um tipo de “motor varredor” de busca que vasculha e classifica as páginas na rede.

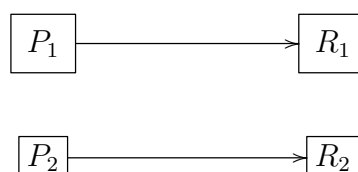
Buscaremos aqui explicar o funcionamento básico das buscas realizadas pelo Google, destacando os resultados do ranqueamento numa pesquisa e que esta é definida pela importância das páginas. A importância de uma página considera os “Backlinks”. Backlink é um termo que se refere às ligações que apontam para um site ou página de outro site. Este tipo de conexão também pode ser chamado de “inlink” ou “link de entrada”. Então, de maneira simples, quanto mais backlinks uma página tem, maior será sua importância nessa rede. No entanto, as coisas são um pouco mais complexas para redes com muitas páginas, pois a quantidade de backlinks não definem totalmente a importância de uma página na rede, sendo necessário levar em consideração a qualidade dos backlinks. Para exemplificar isso, vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 4.1. *Imaginemos que você tem uma loja de artigos esportivos que denotaremos por P_1 . Agora considere dois de seus parentes, que denotaremos por P_2 e P_3 , e também dois de seus amigos, que denotaremos por P_4 e P_5 , indicando sua loja. Certamente essas indicações não farão muita diferença se num certo dia um atleta renomado, que indicaremos por P_6 , diz em uma entrevista à imprensa que visitou sua loja e gostou muito do que viu lá.*



Assim, surge a inevitável pergunta: qual das duas indicações é a mais importante, a dos seus parentes e amigos ou a do atleta? Analisando esse exemplo vemos que talvez nenhum de seus parentes e amigos entendam de esporte ou seja famoso nesse meio, enquanto que o atleta é do meio esportivo e muito famoso. Sendo assim, a quem as pessoas irão se referir quando falar de sua loja? Certamente a indicação do tal atleta será considerada a mais relevante, dado sua importância no meio esportivo.

Exemplo 4.2. *Suponha dois restaurantes que notaremos de R_1 e R_2 , análogo ao exemplo anterior. Suponhamos também que esses restaurantes sirvam o mesmo prato, “panquecas” digamos, e esses por sua vez recebem uma indicação (“backlink”) de duas pessoas, que denotaremos de P_1 e P_2 , respectivamente.*



Digamos o primeiro seja um chefe de cozinha conhecido e renomado, e o segundo é uma pessoa comum. Então, quem recebe a indicação do chefe de cozinha é mais relevante do que recebe a indicação da pessoa comum.

Nos dois casos dos exemplos, o que conta é a autoridade de quem indica. A busca do Google age de maneira semelhante: a quantidade de backlinks não é tão importante quanto a qualidade desses backlinks, ou seja, é melhor ter um backlink de um site especializado apontando para o seu site do que vários sites comuns e de menor importância o indicando. A importância numa rede é definida por duas coisas: pela quantidade de backlinks recebidos de outros sites e pela indicação de sites importantes na rede. A importância de um backlink é medida através de uma métrica que se chama PageRank. Basicamente, **PageRank** é uma distribuição de probabilidade que representa a possibilidade de uma pessoa, clicando aleatoriamente em links, chegar em uma determinada página.

Exemplo 4.3. Consideremos uma rede organizada conforme a Figura 4.1, onde cada “bolinha” representa um site da rede e o percentual que aparece refere-se a importância de cada site. Nessa rede, o site C tem 34,3% de importância, sendo o segundo mais importante da rede. Observe que C recebe apenas um backlink, porém ele é recomendado por um site que pode ser entendido como uma autoridade nessa rede.

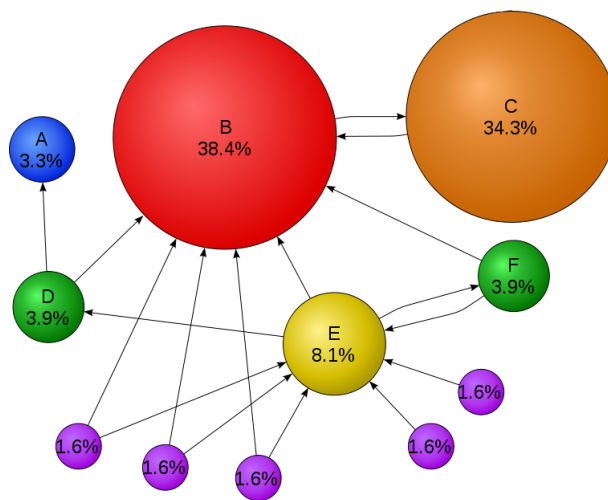
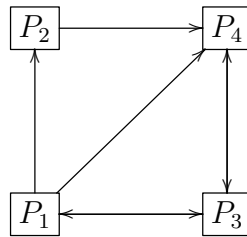


Figura 4.1: Organograma de uma Rede

A teoria do PageRank se baseia na ideia de que um usuário (“surfista aleatório”) navegando na rede clica aleatoriamente em links. Um exemplo disso é supor um universo de quatro páginas, onde estas páginas se ligam por links, considere também que a probabilidade de clicar em um link na página é igual, ou equiprovável, se a página apresentar mais de um link, ou seja, as transições de uma página para as outras são equiprováveis.

Exemplo 4.4. Suponhamos que um certo usuário aleatório quer navegar nesse universo de quatro páginas, admitiremos que essa web é admissível, isto é, que cada

página aponta pelo menos para uma outra (ver figura a seguir).



Agora vamos supor que uma pessoa escolha aleatoriamente uma dessas páginas, por exemplo, página 1 (passo 1) e vá para página 4 (passo 2), depois vá para a página 3 (passo 3) e volte para a página 4 (passo 4).

Passo 1

<i>Página</i>	<i>Número de visitas</i>	<i>Fração de visitas</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>2</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>3</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>4</i>	<i>0</i>	<i>0</i>

Passo 2

<i>Página</i>	<i>Número de visitas</i>	<i>Fração de visitas</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{2}$
<i>2</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>3</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>4</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{2}$

Passo 3

<i>Página</i>	<i>Número de visitas</i>	<i>Fração de visitas</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{3}$
<i>2</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>3</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{3}$
<i>4</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{3}$

Passo 4

<i>Página</i>	<i>Número de visitas</i>	<i>Fração de visitas</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{4}$
<i>2</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>3</i>	<i>1</i>	$\frac{1}{4}$
<i>4</i>	<i>2</i>	$\frac{1}{2}$

Se o usuário continuar as iterações e der mil cliques, então veremos que as frações de visitas das tabelas convergem para números mostrados no milésimo passo, que é uma medida mais interessante, pois ela mostra a probabilidade de se chegar a uma determinada página após um número muito grande de cliques nessa web de quatro

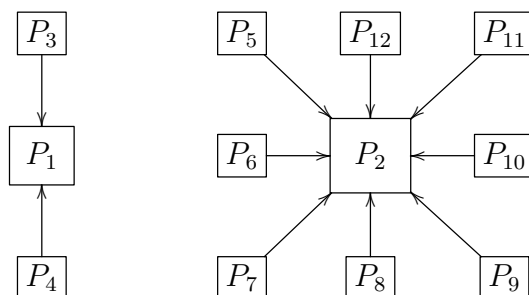
páginas.

Passo 1000

<i>Página</i>	<i>Número de visitas</i>	<i>Fração de visitas</i>
1	200	0,20
2	67	0,07
3	400	0,40
4	333	0,33

Além disso, obsevemos que essa web é bem conectada, pois de qualquer página o usuário pode ir para qualquer outra apenas clicando nos links. Dessa forma percebemos que, após a pessoa ter dado os mil cliques, a última coluna se comporta como um vetor estocástico e indica as probabilidades do internauta está em cada página nessa viagem por essa web.

Exemplo 4.5. A figura deste exemplo mostra uma web não fortemente conectada. Esse tipo de web mostrou-se um pouco difícil de calcular seu PageRank, contudo neste trabalho iremos mostrar como a Google conseguiu fazer certas alterações para contornar o problema e solucioná-lo.

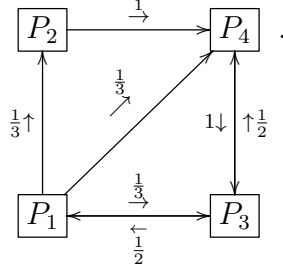


Uma simulação com muitos processos de iteração, como o problema do usuário aleatório, com aplicações num universo hoje de milhões de páginas, mostra-se inviável. Como a internet não se restringe à situação do problema de quatro páginas acima, é impraticável rodar uma simulação a cada vez que o índice de páginas é atualizado. Contudo existe uma maneira para se chegar ao PageRank de milhões de páginas: a solução foi obtida modelando o problema como uma Cadeia de Markov de Tempo Discreto (CMTD). Sabe-se que uma Cadeia de Markov é uma máquina de estados, isto é, uma sequência de variáveis aleatórias que representa o estado em determinado tempo. Uma propriedade importantíssima das Cadeias de Markov é a falta de memória, mais conhecida como propriedade markoviana. Isso quer dizer que o próximo estado depende unicamente do estado atual, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para os estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido.

4.1.2 Interpretação do Vetor Estado Estacionário

Para entender melhor a aplicação da Cadeia de Markov no PageRank do Google é preciso relembrar alguns conceitos que iremos usar algumas vezes ao longo desse trabalho. Para facilitar o entendimento, vamos observar a resolução do mesmo exemplo de quatro páginas tratado no Exemplo 4.4. Um desses conceitos é a matriz de transição P .

Exemplo 4.6. Considerando o Exemplo 4.4 e as probabilidades de transição dos estados do referido exemplo, podemos montar a matriz de acordo com as probabilidades dos links



A matriz $P = [p_{ij}]$ é tal que $p_{ij} = 0$ se não houver link de j para i e $p_{ij} = 1/n_j$ se houver link de j para i , sendo n_j o número de links que partem de j . Observando a configuração com as quatro páginas e seguindo os procedimentos, temos a matriz de transição P :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a soma dos elementos de qualquer coluna resulta um e que p_{ij} não depende do tempo, isto é, em qualquer iteração a probabilidade de transição entre um estado e outro é sempre a mesma (quando isso ocorre, diz-se que a **Cadeia de Markov é Homogênea**). Vamos agora calcular a probabilidade de estarmos em qualquer um dos estados através do método da potenciação da matriz de transição da cadeia do nosso exemplo.

Para o estado inicial começamos na página P_1 . Como ainda não houve nenhuma transição, tomemos a matriz elevada a zero

$$P^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado nos diz que podemos chegar a página P_1 com probabilidade 1 (note que já estamos nela). Se efetuarmos a primeira transição, tomaremos a primeira potência de transição

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado nos diz que há $1/3$ de chance de sair da página P_1 e ir para as páginas ligadas.

Para obter o resultado da probabilidade de um usuário sair de uma página P_i para uma página P_j , tendo necessariamente que passar por uma página intermediária P_k , ou seja,

$$P_i \rightarrow P_k \rightarrow P_j,$$

precisamos calcular a probabilidade de sair da página $\boxed{P_i}$ para uma página $\boxed{P_k}$, depois sair da página $\boxed{P_k}$ para a página $\boxed{P_j}$, onde $\boxed{P_k}$ representa todas as possíveis páginas intermediárias. Efetuando os cálculos e somando os resultados obteremos a probabilidade de sair da página $\boxed{P_i}$ para a página $\boxed{P_j}$, exatamente em dois passos considerando todos os caminhos possíveis. Para efeito de exemplo, digamos que queremos saber a probabilidade de sair da página $\boxed{P_1}$ para a página $\boxed{P_4}$ com dois passos. Assim devemos calcular a probabilidade de sair da página $\boxed{P_1}$ para página $\boxed{P_k}$, depois sair da página k para a página $\boxed{P_4}$, passando por todas as possíveis páginas intermediárias $\boxed{P_k}$. Verificando o exemplo, observamos que as únicas possibilidades neste caso são

$$\boxed{P_1} \rightarrow \boxed{P_2} \rightarrow \boxed{P_4} \quad e \quad \boxed{P_1} \rightarrow \boxed{P_3} \rightarrow \boxed{P_4},$$

que nos dá a probabilidade

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

O cálculo de todas as probabilidades de sair de uma página para outra passando por uma intermediária pode ser feito com a simples potência da matriz de transição. Efetuando a segunda potência da matriz de transição temos

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0,16 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,16 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0,66 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,16 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Observe que a primeira coluna nos informa que, partindo da página $\boxed{P_1}$, após duas transições, há 16% de chance de ir para a página $\boxed{P_1}$, 0% de chance de ir para a página $\boxed{P_2}$, 33% de chance de ir para a página $\boxed{P_3}$ e 50% de chance de ir para a página $\boxed{P_4}$.

Deve-se notar que o cálculo da probabilidade efetuado em (4.1), é também efetuado quando realizamos a potência da matriz de transição:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1/3} & \boxed{1} & \boxed{1/2} & \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 1/2 & 0 \\ \boxed{1/3} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1/3} & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1/3} & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,16 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,16 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0,66 & 1 \\ \boxed{0,5} & 0 & 0,16 & 0,5 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a probabilidade de $\boxed{P_1} \rightarrow \boxed{P_4}$ por dois passos, denotada por p_{14}^2 é

$$p_{14}^2 = 1/3 \cdot 0 + 1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 = 1/2 = 0,5 = 50\%.$$

Se continuarmos com nosso exemplo e se repetirmos esse processo um número de iterações suficientemente grande, digamos mil vezes, pelo Exemplo 3.17, a matriz de transição converge para os resultados das frações visitadas pelo usuário aleatório, estando o resultado ordenado em linhas

$$P^{1000} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{1000} = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,20 & 0,20 & 0,20 \\ 0,07 & 0,07 & 0,07 & 0,07 \\ 0,40 & 0,40 & 0,40 & 0,40 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado nos informa a probabilidade do usuário encontrar-se em umas das quatro páginas após mil iterações desse exemplo (vale ressaltar que pelo Exemplo 3.17, a partir da quinquagésima iteração de P todas são iguais, ou seja, a matriz de transição P se encontra em estado estacionário. Podemos assim concluir qual a probabilidade de um usuário aleatório encontrar-se em qualquer página (ou seja, um “PageRank”).

Pode-se também resolver o mesmo problema do Exemplo 4.6 usando a equação matricial

$$P\mathbf{x} = \mathbf{x},$$

onde P é matriz de transição e \mathbf{x} o Vetor Estado Estacionário. Para tanto, montando um sistema a partir da equação matricial temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3/2 \\ x_2 = x_1/3 \\ x_3 = x_1/2 + x_4 \\ x_4 = x_1/3 + x_2 + x_3/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3/2 + 0x_4 = 0 \\ -x_1/3 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ -x_1/3 + 0x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1/3 - x_2 - x_3/2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora podemos usar o método do escalonamento para obter a solução do sistema. Com efeito, multiplicando a 1ª linha por 1/3 e somando o resultado as outras linhas obtemos o seguinte resultado

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2/3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somemos a 2ª linha com a 4ª e obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/6 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somemos por fim a 3ª linha com a 4ª da última matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa última matriz nos diz que o sistema é indeterminado e que podemos considerar uma variável livre, que neste caso é x_4 , com isso a solução do sistema é dado da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l|l} 5x_3/6 - x_4 = 0 & x_2 - x_3/6 = 0 & x_1 - x_3/2 = 0 \\ 5x_3/6 = x_4 & x_2 = x_3/6 & x_1 = x_3/2 \\ x_3 = 6x_4/5 & x_2 = x_4/5 & x_1 = 3x_4/5 \end{array}.$$

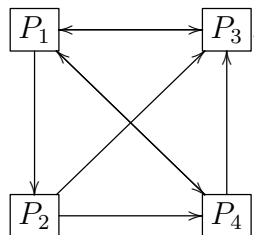
Além disso, o vetor estacionário tem a soma de suas componentes igual a 1. Disso decorre que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, portanto temos que:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & x_1 = 3/5 \cdot 1/3 & x_2 = 1/5 \cdot 1/3 & x_3 = 6/5 \cdot 1/3 \\ 3x_4/5 + x_4/5 + 6x_4/5 + x_4 = 1 & x_1 = 1/5 & x_2 = 1/15 & x_3 = 2/5 \\ 15x_4 = 5 & x_1 = 0,2 & x_2 = 0,07 & x_3 = 0,4 \\ x_4 = 5/15 & & & \\ x_4 = 1/3 & & & \end{array}.$$

Daí temos que o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,07 \\ 0,40 \\ 0,33 \end{bmatrix}$.

Concluimos que o site 3 tem importância maior que os outros nessa web e o site 2 é o que tem menor importância, segundo a ordenação do Google.

Exemplo 4.7. Consideremos uma outra rede com 4 páginas e vamos determinar seu vetor estado estacionário resolvendo mais um sistema de equações lineares pelo método do escalonamento:



Temos a matriz de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos montar a equação matricial e o sistema com os links que saem de cada página:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4/2 \\ x_2 = x_1/3 \\ x_3 = x_1/3 + x_2/2 + x_4/2 \\ x_4 = x_1/3 + x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 - x_4/2 = 0 \\ -x_1/3 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ -x_1/3 - x_2/2 + x_3 - x_4/2 = 0 \\ -x_1/3 - x_2/2 + 0x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que os sistemas obtidos sempre são homogêneos, e isto indica que têm sempre solução. Então vamos escalonar o sistema acima e pra isso multipliquemos por $1/3$ a 1^a linha e somemos o resultado as demais linhas obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/3 & 5/6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Multipliquemos a 2^a linha por $1/2$ e somemos o resultado a 3^a e com a 4^a , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somemos por fim a 3^a linha com a 4^a da última matriz, daí temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essa última matriz nos diz novamente que o sistema é indeterminado, e podemos considerar uma variável livre, que de novo escolhemos x_4 , com isso, a solução do sistema é obtida da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l|l} x_3/2 - 3x_4/4 = 0 & x_2 - x_3/3 - x_4/6 = 0 & x_1 - x_3 - x_4/2 = 0 \\ x_3/2 = 3x_4/4 & x_2 = x_3/3 + x_4/6 & x_1 = x_3 + x_4/2 \\ x_3 = 6x_4/4 & x_2 = 3x_4/6 + x_4/6 & x_1 = 3x_4/2 + x_4/2 \\ x_3 = 3x_4/2 & x_2 = 2x_4/3 & x_1 = 2x_4 \end{array}.$$

Além disso o vetor estacionário tem a soma de suas componentes igual a 1. Disso decorre que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, portanto temos que:

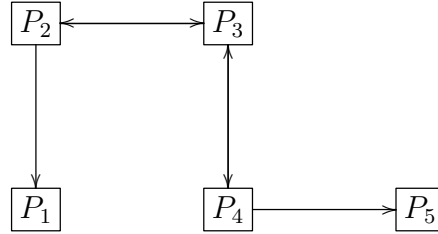
$$\begin{array}{l|l|l|l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & x_1 = 2 \cdot 6/31 & x_2 = 2/3 \cdot 6/31 & x_3 = 3/2 \cdot 6/31 \\ 2x_4 + 2x_4/3 + 3x_4/2 + x_4 = 1 & x_1 = 12/31 & x_2 = 4/31 & x_3 = 9/31 \\ 12x_4 + 4x_4 + 9x_4 + 6x_4 = 6 & & & \\ 31x_4 = 6 & & & \\ x_4 = 6/31 & & & \end{array}.$$

Assim, temos o vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 12/31 \\ 4/31 \\ 9/31 \\ 6/31 \end{bmatrix}$.

A principal questão de nosso estudo praticamente é observar se a sequência de vetores \mathbf{x}^k (ver Seção 3.1.3) está convergindo para algum limite quando k aumenta e como interpretar esse vetor limite, se existir, ou seja, se o vetor estado converge (na Observação 3.13 apresentamos exemplo de sequência de vetores que divergia).

Os dois exemplos seguintes mostram algumas dificuldades que o PageRank pode se deparar.

Exemplo 4.8. Considere um passeio aleatório entre as páginas P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 com fronteiras absorventes, ou seja, páginas que não têm links para outras páginas, cujo grafo e a matriz de transição são os seguintes:



e

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesses casos dizemos que essas redes possuem sumidouros e suas importâncias não são passadas adiante e, portanto, na matriz de probabilidade, é como se essas páginas apontassem para si mesmas, ou seja, formam laços e todas suas importâncias são auto direcionadas.

Existem apenas duas possibilidades a longo prazo para essa cadeia: ela tende a terminar em P_1 ou em P_5 . Assim, a probabilidade de que a cadeia esteja em P_2, P_3 ou P_4 fica cada vez menor à medida que n aumenta, como podemos ver na ilustração de P^n , com n cada vez maior:

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0,74951 & 0,49951 & 0,24951 & 0 \\ 0 & 0,00049 & 0 & 0,00049 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00098 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00049 & 0 & 0,00049 & 0 \\ 0 & 0,24951 & 0,49951 & 0,74951 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$P^{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0,749985 & 0,499985 & 0,249985 & 0 \\ 0 & 0,000015 & 0 & 0,000015 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000030 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000015 & 0 & 0,000015 & 0 \\ 0 & 0,249985 & 0,499985 & 0,749985 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que P^n converge para a matriz

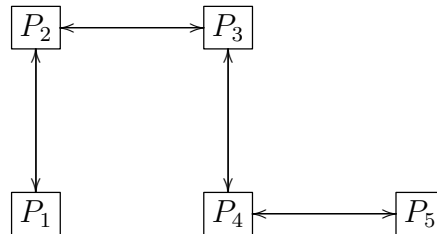
$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix}$$

quando n aumenta. Mas as colunas dessa matriz não são iguais; a probabilidade de terminar em $\boxed{P_1}$ ou em $\boxed{P_5}$ depende de onde a cadeia começou. Deve-se destacar que a cadeia possui vetores estado estacionário, porém não é único e eles não podem ser interpretados como no exemplo anterior. Observe que se $0 \leq q \leq 1$, então cada vetor

$$\begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - q \end{bmatrix}$$

é um vetor estado estacionário para P . Essa matriz tem um número infinito de vetores estado estacionários possíveis e não se pode esperar que um comportamento convergente independente do primeiro estado do processo.

Exemplo 4.9. Considere um passeio aleatório entre páginas $\boxed{P_1}$, $\boxed{P_2}$, $\boxed{P_3}$, $\boxed{P_4}$ e $\boxed{P_5}$ com fronteiras refletoras, ou seja, página que só tem link para a página que a indicou. O grafo e a matriz de transição são os seguintes:



e

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se essa cadeia começar em $\boxed{P_1}$, note que ela só poderá retornar a $\boxed{P_1}$ quando n for par, enquanto a cadeia só poderá estar em $\boxed{P_2}$ quando n for ímpar. De fato, a cadeia tem de estar em um estado par quando n for ímpar e tem de estar em um estado ímpar quando n for par. Se a cadeia começar em $\boxed{P_2}$, no entanto, esta situação ficará invertida: a cadeia terá de estar em um estado ímpar quando n for ímpar e terá de estar em um estado par quando n for par. Portanto, P^n não pode convergir para uma única matriz, já que P^n tem uma aparência muito diferente dependendo

se n for par ou ímpar (ver [9]):

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0,2505 & 0 & 0,2500 & 0 & 0,2495 \\ 0 & 0,5005 & 0 & 0,4995 & 0 \\ 0,5000 & 0 & 0,5000 & 0 & 0,5000 \\ 0 & 0,4995 & 0 & 0,5005 & 0 \\ 0,2495 & 0 & 0,2500 & 0 & 0,2505 \end{bmatrix}$$

$$P^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2502 & 0 & 0,2498 & 0 \\ 0,5005 & 0 & 0,5000 & 0 & 0,4995 \\ 0 & 0,5000 & 0 & 0,5000 & 0 \\ 0,4995 & 0 & 0,5000 & 0 & 0,5005 \\ 0 & 0,2498 & 0 & 0,2502 & 0 \end{bmatrix}$$

Embora P^n não convirja para uma única matriz, P tem um vetor estado estacionário. De fato,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

é um Vetor Estado Estacionário para P . Daí a equação $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$ é válida para qualquer n e esse vetor pode ser interpretado como fornecendo probabilidades no longo prazo.

4.1.3 PageRank e a Matriz do Google

A rede mundial de computadores pode ser modelada como um grafo direcionado com os vértices representando as páginas e as arestas representando os links entre as páginas. Se a matriz de transição P para essa Cadeia de Markov fosse regular, o Teorema 3.15 garantiria que existe um Vetor Estado Estacionário \mathbf{q} para a cadeia e as coordenadas de \mathbf{q} poderiam ser interpretadas como tempos de ocupação para cada estado. Infelizmente, nem toda cadeia de Markov possui matriz de transição regular, como já destacado na Observação 3.13.

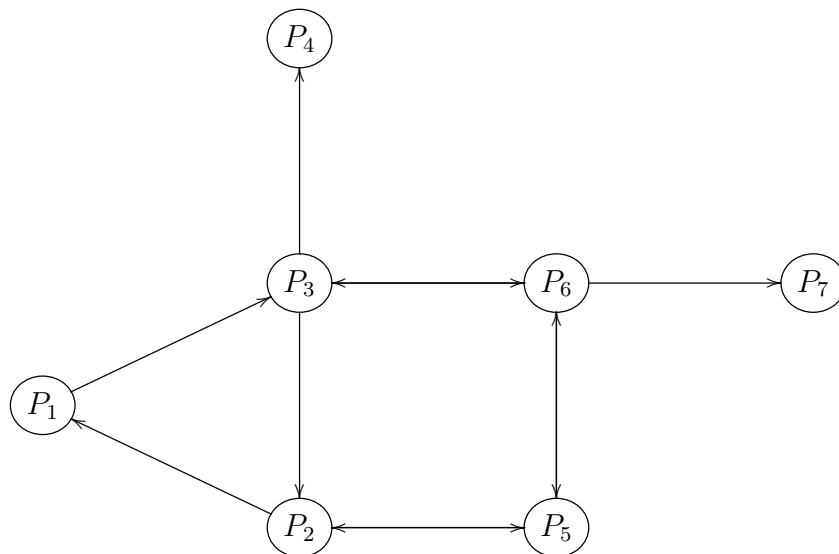
Em termos do modelo, as coordenadas de \mathbf{q} diriam que fração de tempo a pessoa clicando seria gasto em cada página. Os fundadores do Google, Sergey Brin e Lawrence Page, raciocinaram que páginas “importantes” receberiam links de páginas “importantes”. Assim, a pessoa clicando de forma aleatória gastaria mais tempo em páginas importantes e menos tempo em páginas menos importantes. Mas a quantidade de tempo gasta em cada página é simplesmente o tempo de ocupação daquele estado na Cadeia de Markov. Essa observação é a base para o algoritmo PageRank, que é o modelo usado pelo Google para ordenar por importância todas as páginas na rede catalogadas por ele.

Observação 4.10. A importância de uma página na rede é medida pelo tamanho relativo da coordenada correspondente no Vetor Estado Estacionário \mathbf{q} para uma Cadeia de Markov escolhida de modo apropriado.

Infelizmente, um passeio aleatório simples no modelo de grafo direcionado para a rede não é geralmente uma Cadeia de Markov apropriada, porque a matriz P pode não ser regular e assim o Teorema 3.15 não se aplica.

Pode-se heurísticamente afirmar de forma objetiva que o mérito do Google se deve aos ajustes desenvolvidos para torna redes de páginas modeladas com cadeias de Markov com matrizes de transição regulares.

Exemplo 4.11. Considere o modelo de uma web com sete páginas como o da figura a seguir:



e cuja matriz de transição é

$$M_P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que as páginas P_4 e P_7 recebem indicações das páginas P_3 e P_6 , respectivamente, que por sua vez não indica nenhuma outra página. Páginas como essas designamos de: páginas penduradas (ou nós pendurados, ou sumidouros, como já mencionado nos exemplos anteriores), de modo que são estados absorventes (possibilidade de um surfista aleatório permaneça para sempre em uma dessas extremidades quando lá chegar), o que já chamamos nos exemplos anteriores de passeio aleatório com fronteiras absorventes (“os laços”) para a cadeia. Como nos exemplos anteriores, a presença de estados absorventes implica os vetores de estado não tenderem a um único limite quando $n \rightarrow \infty$. Para tratar nós pendurados, é preciso fazer um ajuste na matriz M_P :

AJUSTE-1: Se a pessoa surfando na rede chegar a um nó pendurado, ela irá escolher qualquer página na rede com a mesma probabilidade e moverá para

aquela página. Em termos da matriz de transição M_P , se o estado j for um estado absorvente, substitua a coluna j de M_P pelo vetor:

$$\begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix},$$

no qual n é o número de linhas (e colunas) em M_P . No exemplo com sete páginas, a matriz de transição agora é:

$$M_{P^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 1/2 & 0 & 1/7 \\ 1 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 1/3 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/7 & 0 & 1/3 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 1/2 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 1/3 & 1/7 \end{bmatrix}.$$

No entanto observemos que esse ajuste ainda não é suficiente para garantir que a matriz de transição seja regular: embora não existam mais nós pendurados, ainda é possível existirem “ciclo” de páginas. Note que se a página j só tiver links para a página i e a página i só tiver links para a página j , uma pessoa que chegue a qualquer uma dessas páginas ficará condenada a passar a eternidade clicando da página i para a página j e vice versa. Assim, as colunas de $M_{P^*}^k$ correspondentes a essas páginas sempre teriam elementos nulos nelas e a Matriz de Transição M_{P^*} não seria regular. Assim, é necessário outro ajuste (o que não é o caso deste exemplo-analise com calma) que valerá para um caso geral:

AJUSTE-2: Seja p um número entre 0 e 1. Suponha ainda que a pessoa surfando na rede esteja agora na página j . Com probabilidade p , a pessoa irá escolher uma página entre todas as que recebem links da página j com probabilidades iguais e irá se mover para aquela página. Com probabilidade $1 - p$, a pessoa irá escolher qualquer página na rede com probabilidades iguais e irá se mover para aquela página. Em termos da Matriz de Transição M_{P^*} , a nova matriz de transição será

$$MG = p \cdot M_{P^*} + (1 - p) \cdot K,$$

onde K é uma matriz $n \times n$ com todos os elementos iguais a $1/n$. Portanto, a matriz MG é chamada **Matriz do Google** e MG é agora uma matriz regular, já que todos os elementos em $MG^1 = MG$ são positivos. Embora qualquer valor de p entre 0 e 1 seja permitido, dizem que o Google usa um valor de $p = 0,85$ para seus cálculos no algoritmo PageRank. No exemplo da rede com sete páginas, a Matriz do Google é

$$MG = 0,85 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 1/2 & 0 & 1/7 \\ 1 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 1/3 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/7 & 0 & 1/3 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 1/2 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 & 1/3 & 1/7 \end{bmatrix} +$$

$$0,15 \cdot \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$MG = \begin{bmatrix} 0,021429 & 0,446429 & 0,021429 & 0,142857 & 0,021429 & 0,021429 & 0,142857 \\ 0,021429 & 0,021429 & 0,304762 & 0,142857 & 0,446429 & 0,021429 & 0,142857 \\ 0,871429 & 0,021429 & 0,021429 & 0,142857 & 0,021429 & 0,304762 & 0,142857 \\ 0,021429 & 0,021429 & 0,304762 & 0,142857 & 0,021429 & 0,021429 & 0,142857 \\ 0,021429 & 0,446429 & 0,021429 & 0,142857 & 0,021429 & 0,304762 & 0,142857 \\ 0,021429 & 0,021429 & 0,304762 & 0,142857 & 0,446429 & 0,021429 & 0,142857 \\ 0,021429 & 0,021429 & 0,021429 & 0,142857 & 0,021429 & 0,304762 & 0,142857 \end{bmatrix}.$$

Agora é possível encontrar o Vetor Estado Estacionário \mathbf{q} pelos métodos já mencionados:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,116293 \\ 0,168567 \\ 0,191263 \\ 0,098844 \\ 0,164054 \\ 0,168567 \\ 0,092413 \end{bmatrix},$$

de modo que a página mais importante de acordo com o PageRank é a página P_3 , que corresponde à maior coordenada de \mathbf{q} . A ordenação completa é $P_3, P_2, P_6, P_5, P_1, P_4$ e P_7 .

Observação 4.12. Quando uma rede é fortemente conectada, isto é, quando podemos passar de um site arbitrário para outro qualquer apenas clicando nos links, o conjunto de soluções do sistema tem dimensão 1. Entretanto, quando uma Web não é fortemente conectada, as soluções de $Pq = q$ não são todos proporcionais entre si e, conseqüentemente, encontramos problemas na ordenação das importâncias. Por isso os ajustes são aplicados, para tornar qualquer web não fortemente conectada em fortemente conectada. Se relacionássemos K a um grafo direcionado, esse representaria uma Web onde todos os sites teriam links para todos os outros, inclusive para si mesmos, assim, K seria uma matriz “neutra” que estaria fazendo uma média ponderada com a matriz M_p . O ponto é que o conjunto de solução de $Pq = q$ tem dimensão 1 e, assim, é possível ranquear os sites. Devido à “neutralidade” de K , a mudança não afetaria a ordenação intuitiva da importância dos sites.

Observação 4.13. O cálculo de \mathbf{q} não é trivial, já que a matriz do Google tem mais de 8 bilhões de linhas e colunas. O Google usa uma versão do método da potência para calcular \mathbf{q} . São necessárias apenas 50 ou 100 iterações do método para obter o vetor \mathbf{q} com a precisão que o Google necessita para sua ordenação. Ainda assim, o Google demora dias para calcular um novo valor de \mathbf{q} , o que é feito todo mês.

Finalizamos o presente trabalho com um exemplo trabalhado com alunos em uma sala de aula do Algoritmo PageRank do Google para obter as importâncias das páginas, ou seja, o ranqueamento.

Exemplo 4.14. *Em uma turma do 2º ano médio de 2014 com 24 alunos do colégio Estadual Antonio Fontes Freitas foram selecionados 12 alunos para uma pesquisa de importância relacionada a quem cada um apontaria como pessoa mais influente da classe, podendo indicar mais de um colega ou nenhum. A matriz de transição P a seguir mostra as indicações dos alunos selecionados, observando que eles só poderiam indicar apenas os colegas daquele grupo de 12.*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular as potências de P usando o programa “WINMAT” para determinar o Vetor Estado Estacionário com cinco casas decimais de precisão:

$$P^{20} = P^{100} = P^{1000} = P^{10000} = P^{100000} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 & 0,14475 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 & 0,04069 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 & 0,20362 \\ 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 & 0,12461 \\ 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 & 0,03115 \\ 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 & 0,23062 \\ 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 & 0,02562 \\ 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 & 0,07687 \\ 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 & 0,12206 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} 0,14475 \\ 0 \\ 0 \\ 0,04069 \\ 0 \\ 0,20362 \\ 0,12461 \\ 0,03115 \\ 0,23062 \\ 0,02562 \\ 0,07687 \\ 0,12206 \end{bmatrix}.$$

Então a ordenação seria dada da seguinte forma, em 1º lugar ficaria o aluno identificado pelo número 9, com 23,06%, seguido pelo aluno identificado pelo número 6, com 20,36%, logo em seguida vem o aluno identificado pelo número 1, com 14,47% e em último ficariam os alunos identificados pelos números 2, 3 e 5.

Vejamos agora como ficaria a ordenação se fosse usado o algoritmo do PageRank do Google $MG = 0,85 \cdot P + 0,15 \cdot K$, onde K é a matriz neutra

$$K = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que MG é:

$$MG = 0,85 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 1/3 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$0,15 \cdot \begin{bmatrix} 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,29583 & 0,01250 & 0,01250 & 0,29583 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,29583 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,22500 & 0,01250 & 0,29583 & 0,22500 & 0,29583 & 0,01250 & 0,22500 & 0,01250 & 0,29583 & 0,29583 & 0,01250 & 0,29583 \\ 0,22500 & 0,01250 & 0,01250 & 0,22500 & 0,29583 & 0,29583 & 0,01250 & 0,29583 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,22500 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,22500 & 0,86250 & 0,29583 & 0,22500 & 0,29583 & 0,29583 & 0,22500 & 0,29583 & 0,01250 & 0,29583 & 0,29583 & 0,29583 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,29583 & 0,01250 \\ 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 & 0,29583 & 0,01250 & 0,01250 & 0,01250 \\ 0,22500 & 0,01250 & 0,29583 & 0,22500 & 0,01250 & 0,01250 & 0,22500 & 0,29583 & 0,01250 & 0,29583 & 0,29583 & 0,01250 \end{bmatrix}.$$

Essa seria a Matriz do Google para esse exemplo em particular. Agora podemos usar o método das potências de matrizes para calcular o Vetor Estado Estacionário que representará em sua componentes as importâncias de cada um dos 12 alunos, que certamente terá a mesma ordem de importância calculada anteriormente. A diferença é que os resultados aqui evitam sumidouros, ou seja, nós pendurados. Calculando a centésima iteração, ou seja, P^{100} , temos:

$$\begin{bmatrix} 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 & 0,12773 \\ 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 \\ 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 \\ 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 & 0,04622 \\ 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 & 0,01249 \\ 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 & 0,18686 \\ 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 & 0,11649 \\ 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 & 0,03725 \\ 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 & 0,21987 \\ 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 & 0,03368 \\ 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 & 0,07479 \\ 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 & 0,11904 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$q = \begin{bmatrix} 0,12773 \\ 0,01249 \\ 0,01249 \\ 0,04622 \\ 0,01249 \\ 0,18686 \\ 0,11649 \\ 0,03725 \\ 0,21987 \\ 0,03368 \\ 0,07479 \\ 0,11904 \end{bmatrix}.$$

Obeservemos que as importâncias foram redistribuídas de tal forma que os que tinham 0,0% agora tem 1,25% aproximadamente. O resultado final do vetor mostra que se fosse necessário escolher um aluno desse grupo que fosse mais influente, que por sua vez foi indicado pelos próprios alunos do grupo, bastava selecionar o aluno de número 9 correspondente a maior componente do Vetor Estado Estacionário q .

Pode-se então concluir que o PageRank é um tipo de programa que varre a rede em busca de expressões ou palavras indicadas por links de páginas visitadas e ao mesmo tempo constrói uma matriz de tamanho adequado fazendo as alterações apropriadas vistas anteriormente para montar a “Matriz do Google”. Por fim ranqueia o resultado usando o método das potências e que provavelmente guarda na base de dados do Google, fornecendo esse resultado quando solicitado por um usuário.

É fato que os resultados dados na página do Google, quando está sendo feito uma pesquisa, sofrem várias influências, tais como: região onde se localiza; sexo, religião, pesquisas anteriores, etc. Mas, na essência, o que importa aqui é como esse algoritmo transforma indicações de uma página para outra em informação que leva ao ranqueamento das mesmas, e isso é feito por um conhecimento matemático conforme apresentado.

Apêndice A

Histórico

O surgimento dos sites de buscas, desde os seus fundadores até a ascensão e hegemonia do Google

A principal contribuição do Google para o mundo pós-moderno foi sem dúvida colocar à disposição de qualquer pessoa conectada todo o conteúdo disponível na internet, ao ponto de poder ser alcançado através de uma simples busca. Sem o Google, o mundo atual seria muito diferente, imagine um mundo em que você não pudesse fazer uma pesquisa instantânea ou um mundo onde não pudesse obter com um simples click o PIB de um determinado país, por exemplo. Pelo fato da sua principal contribuição ter sido a sua poderosa ferramenta de buscas, sem ela a nossa vida seria bem mais complexa, ao ponto de tornar a obtenção de algumas informações simples num verdadeiro martírio.

Há pouco mais de 15 anos não havia o site Google, e cinco anos antes disso não havia como fazer buscas na Internet. Isso era um grande problema, tendo em vista que não adiantaria a rede mundial de computadores “World Wide Web” se não pudesse navegar e encontrar aquilo que busca. Grandes sites da época como Yahoo e o Excite, apesar destes terem algumas das mais brilhantes mentes do comércio americano por trás, não foram capazes de descobrir e resolver esse grande embate. Até que uma dupla de jovens super nerds (Larry Page e Sergey Brin) solucionaram o problema das buscas na rede, trazendo assim grandes inovações tecnológicas.

Hoje ao entrarmos na Web e digitarmos um termo numa ferramenta de busca, rapidamente teremos uma lista de sites com links que nos levam até eles. Ou seja, em um terço de segundo poderá descobrir as informações básicas, ou até mesmo bem detalhada, do que nos interessa. E, dado a todos, a saber, que existe mais de 150 milhões de sites e bilhões de páginas na Web, essa tecnologia que permite uma busca bem precisa é uma espécie de quase milagre que a maioria das pessoas não dá seu devido valor. Esquecemos que a pouco tempo a Web era cheia de páginas e mais páginas recheadas de textos simples, listas imensas de frases sublinhadas, e encontrar o que procurava nela era praticamente impossível. Não havia jeito de procurar as coisas, só o que as pessoas podiam fazer era seguir links e torcer para que a sorte levasse a alguma coisa útil.

Para entender como chegamos ao nível atual, como tudo aconteceu, voltaremos a uma época anterior a da Google, no Vale do Silício na Universidade de Stanford (Califórnia), de nomes lendários na área como Apple, Intel e Oracle, fonte de

inúmeras ideias brilhantes. Nesse ambiente acadêmico estudou os jovens Jerry Yang e David Flio, que tiveram a brilhante ideia que se tornaria base de uma das empresas mais conhecidas dos Estados Unidos (YAHOO) e que os transformariam em bilionários. Tudo começou quando Jerry e David estavam buscando um jeito fútil de usar a Internet para ganhar o concurso da liga de basquete de Stanford, os garotos eram estudantes de Engenharia Elétrica e tinha acesso a Web. Eles a varreram minuciosamente site por site buscando informações atualizadas sobre esportes. David descobriu como acessar um monte de sites diferentes para conseguir os dados dos jogos de basquete da noite anterior (quem tinha se machucado, etc.). Ele baixou todas as informações e compilou os dados para tentar ver se devia mudar de jogador, mudar de estratégia ou o que fosse necessário. É difícil imaginar uma meta mais trivial do que um concurso desses, mas ao procurar dados esportivos obscuros nessa rede estranha e desajeitada chamada Internet, Jerry e David davam os primeiros passos no caminho para a busca. Em 1994, fascinado com a novidade chamada World Wide Web, ele e seu colega David Filo criaram um website que apresentava um diretório de outros sites. Seu nome oficial era “Jerry’s Guide to the World Wide Web” (em inglês, o guia de Jerry para a WWW), mas logo foi renomeado para a interjeição “Yahoo!”. David achava que era preciso entender o que a Internet tinha a oferecer. Segundo ele, era preciso algum tipo de guia, algum tipo de diretório para ajudar a navegar. Era um pensamento simples, porém brilhante, um diretório que pudesse mostrar a marinheiros de primeira viagem na Web como encontrar coisas legais nesse novo mundo eletrônico. Mas não tinha nada a ver com a busca atual, era só um monte de categoria e subcategorias que você podia “caçar” e fuçar. Esses viciados em internet passavam horas e horas olhando o máximo de sites possível e então decidindo como organizá-los, segundo Flio, da noite para o dia jorrou uma procura mundial, milhões de usuários do mundo todo correram para o site, os dois perceberam então que precisavam de um nome mais curto e que soasse bem. A Yahoo era uma grande ideia, mas uma ótima ideia não basta para se tornar uma grande empresa, precisava de dinheiro, e muito, mas como todos sabem, não há falta dele no Vale do Silício, lar dos escritórios de muitos investidores de riscos lendários, esses investidores decidem quais empresas iniciantes sobreviverão e quais nunca verão a luz do dia. E uma das mais bem sucedidas entre essas empresas é Sequoia Capital. Seu sócio mais famoso Michael Moritz decidiu fazer uma visita aos jovens fundadores da Yahoo, investindo dois milhões de dólares no site de Yang e Flio. E ao fazê-lo ajudaria a iniciar a corrida ao ouro que logo tomaria toda a web.

Em 2007 empresas de busca como o Yahoo e a Google geraram bilhões de dólares em receitas e lucros, tornando-os a inveja de empreendedores. Mas se ninguém usava a web para negócios ou comércio, a ideia em si era considerada uma heresia, ou, até mesmo um veneno. E argumentos a respeito da eminente comercialização da web eram ferozes e se resumiam apenas a uma palavra, publicidade.

A publicidade dividiu a comunidade na web, de um lado estavam os investidores de risco e outros tipos financeiros que acreditavam que a internet era um novo meio, e a mídia sempre fora sustentada pela publicidade. Segundo Michael Moritz quando você consegue reunir uma plateia grande em um lugar, só poderá vender publicidade a ela. E para isso não era preciso muita inteligência. Mas do outro lado estavam os utopistas da internet, que viam a Web como um lugar que prometia a liberdade.

Mas Yang e Flio haviam aceitado o capital de risco, entraram no jogo para construir um negócio, eles tinham que arrumar um jeito da Yahoo ser rentável. De acordo com Michael Moritz, Jerry e David estavam muito preocupados com as ramificações e repercussões de se colocar publicidade no site deles, temendo que fosse ruim para os usuários e que talvez eles se rebelassem e acabasse fugindo. Para os fundadores da Yahoo isso era um dilema grave, ao aceitar publicidade eles arriscavam alienar seus usuários leais. Mas realmente não havia qualquer outra opção viável, nada mais eles podiam fazer. Para David Flio naquele momento a publicidade parecia a melhor escolha, porém estava realmente preocupado com ela. No final de 1995 a Yahoo começou a aceitar publicidade em Banner, mesmo inseguros e céticos em relação às primeiras propagandas.

A agonia acabou, sendo em vão, os usuários do Yahoo continuaram se multiplicando e mais usuários significavam mais anunciantes pagando mais por seus banners, diante de um número crescente de olhos. Pela primeira vez a Yahoo tinha mostrado que era possível ganhar dinheiro na web. Era um momento crucial na história, e significava uma coisa, o surto da web tinha começado.

Em 1996 a Yahoo enfrentava uma série de desafiantes que ganhavam terreno sobre ela. Cita-se, AltaVista, mas a rival mais formidável da Yahoo era uma empresa chamada Excite. Na superfície a Excite era muito parecida com o Yahoo, era outra empresa de busca fundada por outro grupo de garotos de Stanford. A tecnologia que o site desenvolveu era mais sofisticada do que aquela desenvolvida pela Yahoo, em vez de uma lista de sites compilados e divididos em categorias por seres humanos, o Excite era puro software. A pessoa digitava sua indagação e o serviço vasculhava a web encontrando páginas que continham termos que você havia digitado, ou seja, era uma versão rudimentar da busca como a conhecemos hoje. Para Joe Kraus [Cofundador da Excite], acreditava que eles em pouco tempo, ou seriam os primeiros, ou sairiam do ramo.

Em meados do ano de 97 a internet estava explodindo, milhões de pessoas entravam online para vê o motivo de tanta exaltação no meio. O Yahoo, o Excite e outros mecanismos de busca estavam ocupados se transformando no que se conhece hoje como portais. Um mundo diferente e emocionante, repleto de distrações, salas de bate papo, tudo isso eram parque de diversões, um mar de atrações, projetadas para transformar usuários em uma plateia fiel em benefícios dos anunciantes. Mas, embora as empresas de busca tivessem fazendo um grande sucesso, seus propósitos estavam tomando rumos diferentes, concentrando-se apenas nos atrativos, e as necessidades de encontrar coisas na web não parava de crescer. Em outras palavras, as empresas de busca pararam de se importar com a busca. E ainda de fato o maior desafio estava lá fora, encarar empresas de busca bem nos olhos. Mas o sucesso as deixou totalmente cegas. Falando claramente, quando o assunto era localizar informações relevantes na Web, a Yahoo, a Excite e o resto das empresas de busca eram incapazes. Os internautas podiam passar o dia todo digitando varias combinações de palavras para encontrar o que queria, e ainda assim poderiam não ter sucesso, a maioria dos resultados eram links de sites tentando vender alguma coisa que você não queria, e frequentemente sites obscenos.

Em suma, todos queriam uma melhor maneira de fazer buscas na Web. E essa virada de mesa saíria da mesma instituição que já havia produzido a Yahoo e a

Excite, Stanford. “Google”, um termo matemático para 10^{100} , onde novamente os fundadores eram uma dupla de jovens poucos socializados, Lawrence Edward Page “Larry Page” e Sergey Mihailovich Brin “Sergey Brin”. Eles se conheceram na primavera de 1996 em uma visita guiada em São Francisco para estudantes que iam se formar em Stanford. Quem liderava a visita era Sergey, um garoto russo americano, que emigrou junto com seus pais para os Estados Unidos em 1979, ele tinha 19 anos, era um garoto muito novo e um dos candidatos mais jovens ao PhD. Seu professor Terry Winograd de Ciências da Computação dizia que ele era bem sucinto, era um tipo de pessoa com respostas rápidas e tinha ponto de vista radical. Já Larry foi um dos últimos estudantes na visita naquele dia, era um garoto típico do meio oeste, filho de um acadêmico, e a coisa mais incrível que já tinha feito tinha sido uma impressora a jato de tinta com legos.

Os dois se juntaram para pesquisarem e desenvolverem o Google, quando Larry teve a ideia de gênio que transformou a busca em uma coisa mágica e lançou o site. Dadas as consequências abrangentes dessa ideia social, cultural e com certeza financeira, poderíamos pensar que era absurdamente complexo, mas o fato é que era incrivelmente bem simples na sua forma básica.

A ideia começou com a noção de que a web realizava um concurso de popularidade sobre seu próprio conteúdo, e que a quantidade de vezes que uma certa página da Web tinha links em outros sites poderia ser uma medida de sua utilidade ou relevância. Page acreditava que um link de site para outro é uma espécie de recomendação. Ele e Brin construíram a ferramenta de busca da Google e com base nessa convicção escreveu a nova dissertação acadêmica de 1998. Em essência a Google interpreta um link da página A para página B como um voto da página A em prol da B, a Google avalia a importância de uma página pelos votos que ela recebe. Em outras palavras, quando um site sobre Abraham Lincoln resulta em quinze milhões de links, isso significa que muita gente acha-o útil, e se outro site sobre Lincoln resultou em apenas onze links, isso significa que não impressionou quase ninguém. Ou seja, para encontrar os sites mais relevantes só precisava contar os links. A ideia de Larry sobre a contagem de links era simples mais brilhante e acabaria sendo o coração do incrível sucesso da Google. A primeira pessoa a ver a Google em ação foi o professor de Ciências da Computação dos rapazes Hector Garcia-Molina. Segundo ele, passaram horas e horas brincando em uma sala olhando as contagens dos links.

No início quando eles lançaram a Google no site de Stanford todos que viram a ferramenta, perceberam que ela tinha algo especial, era uma ferramenta de busca que voltava a se importar com buscas. Page e Brin lutaram para gerenciar a popularidade de sua novidade inovadora, havia tanto tráfego no Google que quase toda internet da Universidade Stanford entrou em colapso, então a administração da universidade disse a eles que tinham que sair do campus, Stanford não era mais útil para Larry e Sergey era hora deles saírem do campus e irem para o vale do Silício arranjar alguma verba e transformar sua ideia brilhante em uma empresa de verdade, e ao fazê-lo eles se juntaria a milhares de candidatos a empreendedores buscando fama e fortuna no ramo das “.com”. Mas, para se transformar numa empresa gigantesca, era necessário investimentos e de alguém que acreditasse que iria valer a pena. Um deles foi o grande empresário Vinod Khosla, um investidor de risco altamente bem sucedido, do

ramo da tecnologia e um dos cofundadores da Sun Microsystems. Foi Khosla quem apresentou Page e Brin a Excite, que se impressionou com a ferramenta de busca, e achou que tinha uma abordagem melhor. Khosla incentivou a Excite a comprar ou licenciar a tecnologia de busca da Google, que daria uma vantagem contra sua rival a Yahoo, a qual parecia está dominando cada batalha e derrotando todos seus oponentes nas guerras dos portais. Khosla arranhou uma reunião para o tecnologista chefe da Excite, Graham Spencer, conhecer Larry e Sergey num restaurante japonês, e os rapazes da Google chegaram com esperança de garantir a continuidade do projeto. Eles fizeram um teste para demonstrar como seus resultados de busca eram melhores do que os da Excite. Spencer voltou a empresa e contou ao diretor da Excite George Bell sobre a tecnologia da Google assim como Khosla. Para muitos não havia dinheiro na busca, ou que havia pouco dinheiro na busca, não acreditava na sua rentabilidade, e segundo Khosla, houve muita resistência por parte do pessoal da Excite que se achavam capazes de fazer o mesmo que a Google. Então fecharam as portas assim como todas as empresas do Vale, não enxergaram o potencial do site. Frustrados Larry e Sergey procuraram um de seus professores de Stanford que também era um empresário, David Cheriton. Cheriton arranhou uma maneira deles mostrarem seu projeto a Andy Bechtolsheim (Sun Microsystems Inc.) que é um conhecido investidor da região. Encontraram-se na casa de David e fizeram uma demonstração da ferramenta, e se Andy não enxergasse seu potencial, então era hora deles voltarem a se dedicar ao seu PhD, mas Andy ficou muito impressionado e imediatamente acertou com os rapazes. Se pensarmos bem esse investidor salvou, de certa forma, as buscas como ela é hoje, e talvez se passassem muitos anos para aparecer outra ideia genial feito essa.

Agora o próximo passo era mais ambicioso, eles queriam organizar literalmente todas as informações do mundo e torná-la universalmente acessível. Esse plano atraiu os olhares de outra pessoa, John Doerr, um famoso e bem sucedido investidor de risco do Vale do Silício, ele já financiara a Sun, a Compaq o Netscape e Amazon.com. Eles o convenceu de que a busca era uma coisa tão grande tão importante e que ia crescer tanto que teria bilhões em receitas, e então Doerr caiu o queixo, pois já que eles tinham solucionado a coisa mais difícil da internet, então aquilo era possível. Mas como investidor, precisava descobrir como ganhar dinheiro. No entanto descobrir como o Google se tornaria lucrativa não foi nada fácil, e à medida que o tempo passava sem um plano empresarial, os investidores foram ficando cada vez mais inseguros. Para Michael Moritz não havia nenhum meio de sustento para nenhum dos associados ao Google, não havia receita e só despesas, e cerca de meio milhão de dólares saía das portas da Google todo mês, isso significava que os 25 milhões no banco dos investidores não durariam muito. A solução óbvia era seguir os passos da Yahoo e da Excite, era pôr banners de anúncios no site, mas em uma das suas mais corajosas e mais visionárias decisão Page e Brin se recusaram seguir esse caminho, eles simplesmente não conseguiam suportar a ideia de que a Google se tornasse mais um portal semelhantes aos já existente. Os fundadores queriam garantir que as pessoas tivessem uma experiência incrível, mas também com anúncios que fizessem sentido para elas. Eles não eram contra a publicidade em si, eles só queriam que fosse de maneira mais significativa, porém não conseguiam pensar qual seria essa forma. O tempo e o dinheiro estavam acabando, então eles

encontraram uma solução para o seu problema de uma maneira típica, copiaram de outra pessoa, e essa outra pessoa era Bill Gross, um administrador de uma pequena empresa chamada de Idealab uma espécie de incubadora de ideias inovadoras em LóS Angeles. Gross não tinha nenhuma ligação com a Google, foi ele quem descobriu como inserir publicidade no site e garantiu a salvação da Google. A vida de Bill Gross era olhar problemas e procurar maneiras de solucioná-los. No decorrer de sua carreira Gross já tinha feito muita coisa, mas no final da década de 90 a sua obsessão era a propaganda na Web. Quando Gross viu aquele problema da Google, começou a se indagar de que maneira eficaz a publicidade encaixava. Olhando para trás a ideia de Gross assim como a contagem dos links de Page era brilhantemente simples, começou com a percepção de que quando uma pessoa digita uma indagação não só está dizendo ao mundo o que esta procurando, mas frequentemente diz ao mundo o que lhe interessa, agora pegue essa informação digitada no Google e de repente ele tem uma imagem detalhada do pesquisador, uma informação de grande valor para as empresas de anúncio, e isso em essência foi o que Bill Gross viu, e percebeu antes do que qualquer um, que uma ferramenta de busca poderia ser e provavelmente seria uma das formas de propaganda indexada mais poderosas e eficazes do mundo. No jargão do ramo os termos que uma pessoa digita numa ferramenta de busca são chamadas de palavras-chave, e Gross se deu conta de que elas poderiam valer uma fortuna. Para Gross, as palavras chaves eram o futuro do setor, a solução para as ferramentas de busca, pois elas davam em uma janela enorme de sua intenção naquele momento. Gross acreditava que poderia vender palavras chaves aos anunciantes, os quais pagariam um bom dinheiro para garantir que cada vez que alguém digitasse uma palavra numa ferramenta de busca um link para o seu site apareceria no topo dos resultados da busca. Em uma reunião Bill Gross apresentou suas ideias aos acionistas de sua empresa, porém muitos acharam isso recursivo, havendo algumas pessoas repudiando aquilo, e Gross insistia na ideia, para ele era igualzinha às páginas amarelas dos catálogos telefônicos, na sua utilidade, pois são anúncios pagos e é isso que o cliente quer quando está procurando por um serviço, e por que não fazer isso numa ferramenta de busca, seria útil, e a grande ideia dele era sendo uma busca feita como nas páginas amarelas. Gross finalmente persuadiu os céticos em sua empresa e em 1998 lançou um site baseado em palavras chave e links patrocinados que acabou sendo conhecido como Overture, foi um sucesso instantâneo. Sem perceber solucionou o dilema de projeto empresarial da Google. Então os rapazes da Google combinaram algumas reuniões com Gross, no fim dessas reuniões não acertaram com a Overture, então, pouco depois a Google inaugurou um serviço chamado AdWords que era incrivelmente semelhante com o da sua concorrente, Gross processou a Google, levando mais tarde a fazerem um acordo.

A Google incrementaria a ideia original de Gross de várias maneiras importantes, mas a principal é que separaria os anúncios dos resultados de busca orgânica, basta dar uma olhada na página da Google que estamos familiarizados nos dias atuais, a caixa branca onde é digitada a expressão para pesquisa, do lado esquerdo está os resultados limpos gerados pelo algoritmo de relevância do Google, do lado direito temos os anúncios, os links azuis patrocinados, pelos quais as empresas pagaram, e é deles que a Google faturou bilhões de dólares em lucros nos últimos anos. A

ideia realmente era maravilhosa, incrível e surpreendente no início de dois mil. O que a Google tinha feito não foi apenas abrir um caminho na direção de seu sucesso comercial, tinha criado as fundações para a astronômica decolagem da publicidade na internet em grande escala. Em dezenove de agosto de 2004 a Google abriu o seu capital colocando as suas ações a venda na bolsa de valores Nasdaq, nos cinco anos anteriores a empresa tinha saído de zero a incríveis três bilhões de dólares em receitas anuais e tinha se tornado um nome conhecido. A abertura do capital da Google causou um frenesi de especulação e expectativa, e especialmente entre aqueles que esperavam ou torciam para ela revitalizar o setor de tecnologia, ainda se recuperando das quedas das empresas “.com”. Muitas especulações foram feitas sobre a abertura do capital da Google e no fim, apesar de toda tempestade, foi um sucesso único. Qualquer um que tenha comprado ações naquele dia e ainda tem a sorte e a inteligência de tê-las, guardou uma fortuna, três anos depois de sua abertura a Google vale mais que a Fedex, a McDonalds, a Coca-Cola, a Intel, a IBM ou Walmart, ações que renderam muitos dólares e colocaram Brin e Page entre as pessoas mais ricas do mundo. Para Mary Meeker (Diretora-Gerente, Morgan Stanley) a Google sem dúvida é a empresa que mais cresceu no mundo. Apesar de está na lista da Fortune 500, os fundadores da Google sempre lutaram para que sua empresa não fosse percebida como mais uma empresa truculenta e gananciosa, e o seu lema corporativo é “não seja mau”, o seu campus remonta a era das “.com”, mas apesar de todos os atrativos simpáticos a Google continua sendo uma grande empresa capitalista que continua a prosperar com casamento de busca e publicidade que ela aperfeiçoou. A Google despejou investimentos em incontáveis experimentos e projetos apostando em tudo que estava ao seu alcance. Hoje existe o Google Books, Google Mail, Google Maps, Google Earth, Google Calendar e o Google Docs, a empresa comprou a iniciante Blogger para publicação pessoal na Web, e também a iniciante Picasa para compartilhamento de fotos online e é claro o Youtube para compartilhamento de vídeos online. Para muitos que gostam de teoria da conspiração, tudo isso se resume em um plano para dominar o mundo, então não é a toa que a Google mania gradualmente começou a dar lugar a uma crescente Google fobia, e a Google fobia pode ser mais grave entre os defensores da privacidade que se preocupam com a quantidade de informações sobre cada um, pois estão armazenada nas bases de dados da Google. Para Terry Winograd (Professor de Stanford) as pessoas vão sentir perigo em ter informações demais guardadas sobre tudo que fizeram e tudo que buscaram. Para alguns a dominância metastática e a expansão feroz da Google é um chamado à guerra, embora a Excite esteja há muito tempo falecida, a Yahoo aumentou as suas ofertas em buscas de publicidade e quem também tem como missão derrubar a Google é a Microsoft, uma empresa conhecida por chegar tarde à festa e por nunca desistir, mas sempre ser a última a permanecer de pé, e uma que de alguma forma ver grande oportunidade na internet ou em software bem rápido.

É óbvio que à medida que a Google expandiu seu alcance em tantos cantos do comércio a sua lista de inimigos fora e dentro do ramo da tecnologia ficou bem maior, e entre elas estão a Viacom, a News Corporation, editores de livros e em breve toda indústria de telecomunicações, as forças que agora estão se reunindo contra o Google irão confrontar a empresa com desafios muito maiores do que quaisquer outros já

enfrentou. Para a Google continuar a sua ascensão meteórica Larry Page, Sergey Brin e o resto do pessoal da empresa terão de ser ágeis, inovadores, e incrivelmente criativos, a história da alta tecnologia nos ensina que toda empresa não importa o seu tamanho, tem apogeu e decadência, embora isso não tenha acontecido ainda com o Google, mas é inevitável que aconteça. A Google foi mais longe e mais rápido do que qualquer outra empresa já foi em pouco tempo, mas suas maiores batalhas e a verdadeira guerra ainda estão por vir. (O leitor mais interessado em se aprofundar no assunto ver [7])

Referências Bibliográficas

- [1] Almeida, M. F. L. B. P., Celeman, S., *A Matemática Escondida no Google*, Revista do Professor de Matemática, n. 80, editora SBM, pp. 42-45, (2013).
- [2] Anton, H., Rorres, C., *Álgebra Linear com Aplicações*, Editora Bookman, 8ª Ed. (2001).
- [3] Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., Wetzler, H. G., *Algebra Linear*, Editora Harbra, 3ª Ed. (1980).
- [4] Bryan, K. Leise, T., *The \$25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google*, SIAM Review, vol. 48, nº 3, (2006).
- [5] Dante, L. R., *Matemática: Contexto & Aplicações, 2º ano* - Editora Ática, 3ª Ed. - 2ª impressão (2008).
- [6] Hazzan, S., *Combinatória e Probabilidade*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar - Volume 5. Editora Atual, 7ª Ed.(2004).
- [7] Heilemann, J. A., *A Verdadeira História da Internet - Parte 2: A Pesquisa - A ascensão do Google e Yahoo*. Discovery Channel: Documentário, (2008).
- [8] <http://www.tecmundo.com.br/youtube/2295-historia-do-google.htm>, página consultada em 25/03/2014. Artigo escrito por Luísa Barwinski.
- [9] Lay, D. C, *Álgebra Linear e suas Aplicações*, Editora LTC, 4ª Ed. (2013).
- [10] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica*, vol 1, Editora Harbra, 3ª Ed. (2002).
- [11] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C. *Temas e Problemas Elementares*, Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM, 12ª Ed. (2006).
- [12] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A matemática do ensino médio - volume 2* - Editora SBM, 6ª Ed.(2006).
- [13] Stewart, J., *Cálculo*, vol 1, Editora Pioneira Thomson Learning, 5ª Ed. (2006).